

## ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ПЛОСКИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СУЦІЛЬНИХ ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРІВ

*Запропоновано модифікацію алгоритму побудови аналітичних розв'язків плоских осесиметричних задач теорії пружності та термопружності в напруженнях для суцільних циліндрів, складених з радіально-неоднорідних коаксіальних шарів. На відміну від оригінального підходу, який ґрунтується на застосуванні методу безпосереднього інтегрування та апарату узагальненого диференціювання, запропонована модифікація дає змогу формулювати та розв'язувати ключові рівняння таких задач у термінах класичних похідних за радіальною координатою. У такий спосіб спрощено побудову повторних інтегральних ядер резольвентного розв'язку ключового інтегрального рівняння суцільності, до якого зводиться розв'язування задач із використанням методу безпосереднього інтегрування.*

**Ключові слова:** шаруватий циліндр, неоднорідний матеріал, ключові рівняння, резольвентні ядра, точні розв'язки, метод безпосереднього інтегрування.

**Вступ.** Проблема визначення напружено-деформованого стану елементів конструкцій, виготовлених із шаруватих композитів, під дією статичних і динамічних термосилових навантажень була й залишається суттєвим викликом у контексті адекватності інженерних досліджень на міцність та надійність [2, 4, 5, 8, 12, 14, 20]. Важливим стимулом щодо розвитку нових ефективних методів аналізу термопружної поведінки таких тіл є урахування контрастності пружних і теплофізичних характеристик матеріалів сусідніх шарів у композиті, яка сприяє виникненню залишкових напружень на поверхнях з'єднання шарів навіть за рівномірно розподілених полів температур чи силових навантажень [3, 6]. Крім того, суттєві ускладнення, зокрема при використанні числових методів, можуть спричинити значні відмінності товщини шарів, наприклад, коли частина шаруватої структури утворена тонкими прошарками або захисними покриттями, які характеризуються контрастними властивостями [1, 18, 19]. Особливо проблемною є ця обставина при дослідженні мікро- та нанокомпозитів, де відмінність у товщині шарів може бути на рівні порядків [24, 26]. Слід урахувати, що для низки шаруватих композитів є характерним використання функціонально градієнтних прошарків, пружні та теплофізичні властивості яких є функціями координати (зазвичай, товщинної) [23, 25, 29]. Названі проблемні напрямки спонукають до розвитку ефективних моделей та методів дослідження термопружної поведінки шаруватих структур відповідно до сучасних вимог та можливостей прикладної механіки та матеріалознавства.

Класичним підходом до розв'язування задач механіки для шаруватих тіл, які зазнають силових чи температурних впливів на обмежувальних поверхнях, є формулювання задач для окремих шарів, розв'язки яких повинні точно задовольняти вихідні рівняння в межах шару, а також мати достатню кількість ступенів вільності для задоволення умов контакту на розмежувальних поверхнях (для внутрішніх шарів) та умов на обмежувальних поверхнях (для шарів, одна з поверхонь яких є зовнішньою для досліджуваного тіла) [7, 15, 17, 21, 22]. Втім, використання такого підходу може виявитися недостатньо ефективним при аналізі шаруватих структур із великим розкидом товщини шарів або ж коли властивості усіх чи деяких шарів мають складний для побудови аналітичного розв'язку профіль залежності властивостей матеріалу від товщинної координати [28].

<sup>✉</sup> tokovyuy@iapmm.lviv.ua

Альтернативним підходом до аналізу напружено-деформованих та теплових станів шаруватих структур є використання підходу «єдиного цілого», коли властивості усїєї структури задано кусково-сталими (або кусково-змінними у випадку наявності неоднорідних шарів) функціями координати у напрямку, ортогональному до поверхонь розмежування шарів [28]. Використання такого підходу дає змогу більш адекватно враховувати названі вище виклики щодо контрастності властивостей шарів, їхніх геометричних відмінностей тощо. Натомість формулювання та розв'язування відповідних задач теплопровідності, пружності та термопружності пов'язані з використанням апарату узагальненого диференціювання з огляду на можливість розривності функцій, які описують властивості матеріалів та входять у модельні рівняння як змінні коефіцієнти [9–11]. У рамках такого підходу у статтях [16, 27] запропоновано методичку аналізу одновимірного поля напружень у багат шарових циліндрах. За допомогою подання властивостей матеріалу кусково-змінною функцією та методу безпосереднього інтегрування [8, 28, 29] задачі зведено до неklasичного ключового рівняння в термінах напружень з узагальненими похідними. Остання обставина ускладнює побудову розв'язку та числову реалізацію алгоритму.

У цій статті запропоновано модифікацію алгоритму [16, 27], яка полягає у застосуванні методу безпосереднього інтегрування до рівняння суцільності в термінах деформацій. Внаслідок виконання умов ідеального механічного контакту наявні у цьому рівнянні функції є неперервними відносно радіальної координати, тому вказане рівняння сформульовано без використання узагальнених похідних.

**1. Постановка задачі.** Розглядаємо задачу теорії пружності та термопружності для суцільного циліндра, складеного з  $M$  шарів, розмежованих поверхнями  $\rho = \rho_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M - 1$ , в умовах плоскої деформації та осесиметричного термосилового навантаження. Тут  $\rho$  – безрозмірна радіальна координата, яка змінюється в межах  $\rho \in [\rho_0, \rho_M]$ , де  $\rho_0 = 0$ ,  $\rho_M = 1$ ,  $\rho = r/R$ ,  $R$  і  $r$  – розмірні радіус циліндра і радіальна координата,  $\rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_m < \dots < \rho_M$ . За відсутності масових сил задача описується [13] рівняннями рівноваги в напруженнях

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2 \sigma_r(\rho)) = \rho \sigma(\rho) \quad (1)$$

та суцільності в деформаціях

$$\rho \frac{d\varepsilon_\varphi(\rho)}{d\rho} = \varepsilon_r(\rho) - \varepsilon_\varphi(\rho). \quad (2)$$

Тут

$$\sigma(\rho) = \sigma_r(\rho) + \sigma_\varphi(\rho) \quad (3)$$

– сумарні напруження;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  та  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$  – відповідно радіальні й колові напруження та деформації.

Залежність функцій у рівняннях (1)–(3) від радіальної координати  $\rho \in [\rho_0, \rho_M]$  опишемо формулою

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^M f_{[m]}(\rho) S_m(\rho), \quad S_m(\rho) = H(\rho - \rho_{m-1}) - H(\rho - \rho_m), \quad (4)$$

де  $H(\rho)$  – функція Гевісайда;  $f_{[m]}(\rho)$  – значення функції  $f(\rho)$  в  $m$ -му шарі, тобто при  $\rho \in (\rho_{m-1}, \rho_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ;

$$f_{[m]}(\rho_{m-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\rho \rightarrow \rho_{m-1}+0} f_{[m]}(\rho), \quad f_{[m]}(\rho_m) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\rho \rightarrow \rho_m-0} f_{[m]}(\rho). \quad (5)$$

Вважаємо, що шари циліндра перебувають в умовах ідеального механічного контакту

$$u_{[m]}(\rho_m) = u_{[m+1]}(\rho_m),$$

$$\sigma_{r[m]}(\rho_m) = \sigma_{r[m+1]}(\rho_m), \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad (6)$$

де  $u = \rho \varepsilon_\varphi$  – радіальне переміщення, а значення радіальних напружень та переміщень на поверхнях розмежування шарів вжито в розумінні означень, наведених у формулах (5).

З урахуванням умов (6) і формул (4) та (5) рівняння (1) і (2) сформульовано в термінах класичних похідних. Напруження та деформації вважаємо пов'язаними співвідношенням закону Дюгамеля – Неймана

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{2G} - \frac{\nu\sigma}{2G} + \alpha(1+\nu)T - \nu\varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{(1-\nu)\sigma}{2G} - \frac{\sigma_r}{2G} + \alpha(1+\nu)T - \nu\varepsilon_0, \quad (7)$$

де  $G$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  – модуль зсуву та коефіцієнти Пуассона і лінійного теплового розширення, залежність яких від радіальної координати описано виразом (4);  $\varepsilon_0$  – стала осьова деформація, яку визначають за формулами [27] для різних умов на взаємно віддалених торцях циліндра.

Ставимо за мету визначення напружень та радіального переміщення з рівнянь (1)–(3), (7) за умов ідеального механічного контакту (6), дії рівномірно розподіленого на зовнішній циліндричній поверхні силового навантаження

$$\sigma_r(1) = \sigma_{r[M]}(\rho_M) = -p \quad (8)$$

та температурного поля  $T(\rho)$ , яке вважаємо заданою функцією. Тут  $p$  – задане стале значення у розмірності тиску.

**2. Побудова розв'язку.** У роботах [16, 27] для розв'язання задачі (1)–(3), (6) – (8) за допомогою методу безпосереднього інтегрування рівняння (2) з використанням співвідношень (7) подано у напруженнях. Однак, як наслідок розривності на межах шарів функцій, що описують профілі залежності властивостей матеріалу та окремих напружень від радіальної координати, отримане рівняння суцільності в напруженнях сформульовано у термінах узагальнених похідних. Відтак доводиться враховувати стрибки значень розривних функцій на поверхнях спряження шарів, що ускладнює виведення ключового інтегрального рівняння суцільності та побудову резольвентних ядер.

Розглянемо натомість альтернативний спосіб інтегрування рівняння суцільності безпосередньо в термінах деформацій. Проінтегрувавши рівняння (2) за радіальною координатою від  $\rho_0 = 0$  до  $\rho$ , отримаємо таке інтегральне рівняння:

$$\varepsilon_\varphi(\rho) = \varepsilon_\varphi(0) + \int_0^\rho \frac{1}{\eta} \left( \varepsilon_r(\eta) - \varepsilon_\varphi(\eta) \right) d\eta. \quad (9)$$

Тут  $\varepsilon_\varphi(0)$  – довільна стала інтегрування. З урахуванням співвідношень (7) нескладно переконатись, що

$$\varepsilon_r(\rho) - \varepsilon_\varphi(\rho) = \frac{1}{G(\rho)} \left( \sigma_r(\rho) - \frac{\sigma(\rho)}{2} \right).$$

Використовуючи цю рівність та вираз для колової деформації (7), запишемо рівняння (9) у термінах радіальних та сумарних напружень:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu(\rho)}{2G(\rho)} \sigma(\rho) - \frac{\sigma_r(\rho)}{2G(\rho)} + \alpha(\rho)(1 + \nu(\rho))T(\rho) = \\ = \varepsilon_0 \nu(\rho) + \varepsilon_\varphi(0) + \int_0^\rho \frac{1}{\eta G(\eta)} \left( \sigma_r(\eta) - \frac{\sigma(\eta)}{2} \right) d\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

Проінтегрувавши рівняння (1) за радіальною координатою у тих самих межах, отримаємо вираз для радіальних напружень через сумарні:

$$\sigma_r(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \eta \sigma(\eta) d\eta. \quad (11)$$

З урахуванням умови (8) з виразу (11) випливає інтегральна умова

$$\int_0^1 \rho \sigma(\rho) d\rho = -p. \quad (12)$$

У результаті підстановки (11) в (10) отримаємо таке інтегральне рівняння для сумарного напруження:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) = \frac{2G(\rho)}{1 - \nu(\rho)} \varepsilon_\varphi(\rho) + 2\varepsilon_0 \frac{\nu(\rho)G(\rho)}{1 - \nu(\rho)} - \\ - \frac{\alpha(\rho)E(\rho)}{1 - \nu(\rho)} T(\rho) + \int_0^\rho \sigma(\eta) \mathcal{K}(\rho, \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\rho, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^m \mathcal{K}_{[m.n]}^1(\rho, \eta) S_m(\rho) S_n(\eta), \\ \mathcal{K}_{[m.n]}^1(\rho, \eta) = \frac{\eta}{1 - \nu_{[m]}(\rho)} \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{G_{[m]}(\rho)}{G_{[n]}(\eta)} \frac{1}{\eta^2} + \right. \\ \left. + 2G_{[m]}(\rho) (\gamma_m(\rho) - \gamma_n(\eta)) \right), \\ \gamma_i(\rho) = \int_{\rho_{i-1}}^\rho \frac{d\xi}{\xi^3 G_{[i]}(\xi)} + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} \frac{d\xi}{\xi^3 G_{[j]}(\xi)}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (14)$$

Зауважимо, що при обчисленні  $\gamma_i(\rho)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , доведеться мати справу з невластивими інтегралами, підінтегральні вирази яких можуть мати особливість на нижній межі інтегрування  $\rho_0 = 0$ . У цьому випадку при числовій реалізації підходу нижню межу інтегрування заміняють малим параметром  $\iota_0$ , а після побудови формального розв'язку з використанням наведеної нижче методики, переходять до границі при  $\iota_0 \rightarrow 0$ .

Розв'язок рівняння (13) будемо у вигляді

$$\sigma(\rho) = \varepsilon_\varphi(0) \psi(\rho) + \varepsilon_0 \varepsilon(\rho) + \theta(\rho), \quad (15)$$

де

$$\{\psi(\rho), \varepsilon(\rho), \theta(\rho)\} = \sum_{m=1}^M \{\psi_{[m]}(\rho), \varepsilon_{[m]}(\rho), \theta_{[m]}(\rho)\} S_m(\rho),$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{[m]}(\rho) \\ \varepsilon_{[m]}(\rho) \end{array} \right\} &= 2 \left( \frac{G_{[m]}(\rho)}{1 - v_{[m]}(\rho)} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ v_{[m]}(\rho) \end{array} \right\} + \right. \\
&+ \int_{\rho_{m-1}}^{\rho} \frac{G_{[m]}(\eta)}{1 - v_{[m]}(\eta)} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ v_{[m]}(\eta) \end{array} \right\} \mathcal{R}_{[m,m]}(\rho, \eta) d\eta + \\
&+ \left. \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} \frac{G_{[j]}(\eta)}{1 - v_{[j]}(\eta)} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ v_{[j]}(\eta) \end{array} \right\} \mathcal{R}_{[m,j]}(\rho, \eta) d\eta \right), \\
\theta_{[m]}(\rho) &= - \frac{\alpha_{[m]}(\rho) E_{[m]}(\rho)}{1 - v_{[m]}(\rho)} T_{[m]}(\rho) - \\
&- \int_{\rho_{m-1}}^{\rho} \frac{\alpha_{[m]}(\eta) E_{[m]}(\eta)}{1 - v_{[m]}(\eta)} T_{[m]}(\eta) \mathcal{R}_{[m,m]}(\rho, \eta) d\eta - \\
&- \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} \frac{\alpha_{[j]}(\eta) E_{[j]}(\eta)}{1 - v_{[j]}(\eta)} T_{[j]}(\eta) \mathcal{R}_{[m,j]}(\rho, \eta) d\eta, \\
\mathcal{R}(\rho, \eta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^m \mathcal{R}_{[m,n]}(\rho, \eta) S_m(\rho) S_n(\eta), \\
\mathcal{R}_{[m,n]}(\rho, \eta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{K}_{[m,n]}^{\ell+1}(\rho, \eta), \\
\mathcal{K}_{[m,n]}^{\ell+1}(\rho, \eta) &= \int_{\rho_{m-1}}^{\rho} \mathcal{K}_{[m,m]}^1(\rho, \xi) \mathcal{K}_{[m,n]}^{\ell}(\xi, \eta) d\xi - \\
&- \int_{\rho_{n-1}}^{\eta} \mathcal{K}_{[m,n]}^1(\rho, \xi) \mathcal{K}_{[n,n]}^{\ell}(\xi, \eta) d\xi + \\
&+ \sum_{j=n}^{m-1} \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} \mathcal{K}_{[m,j]}^1(\rho, \xi) \mathcal{K}_{[j,n]}^{\ell}(\xi, \eta) d\xi, \tag{16}
\end{aligned}$$

а  $\mathcal{K}_{[m,n]}^1(\rho, \eta)$  визначено формулою (14). Найвну в розв'язку (15) константу  $\varepsilon_{\varphi}(0)$  визначимо підставленням цього розв'язку в умову (12). У результаті одержимо остаточний вираз для сумарних напружень

$$\sigma(\rho) = \sum_{m=1}^M \sigma_{[m]}(\rho) S_m(\rho), \tag{17}$$

де

$$\sigma_{[m]}(\rho) = - \frac{p}{c} \Psi_{[m]}(\rho) + \frac{\varepsilon_0}{c} (c \varepsilon_{[m]}(\rho) - b \Psi_{[m]}(\rho)) + \theta_{[m]}(\rho) - \frac{a}{c} \Psi_{[m]}(\rho),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^M \int_{\rho_{m-1}}^{\rho_m} \rho \left\{ \begin{array}{l} \theta_{[m]}(\rho) \\ \varepsilon_{[m]}(\rho) \\ \Psi_{[m]}(\rho) \end{array} \right\} d\rho.$$

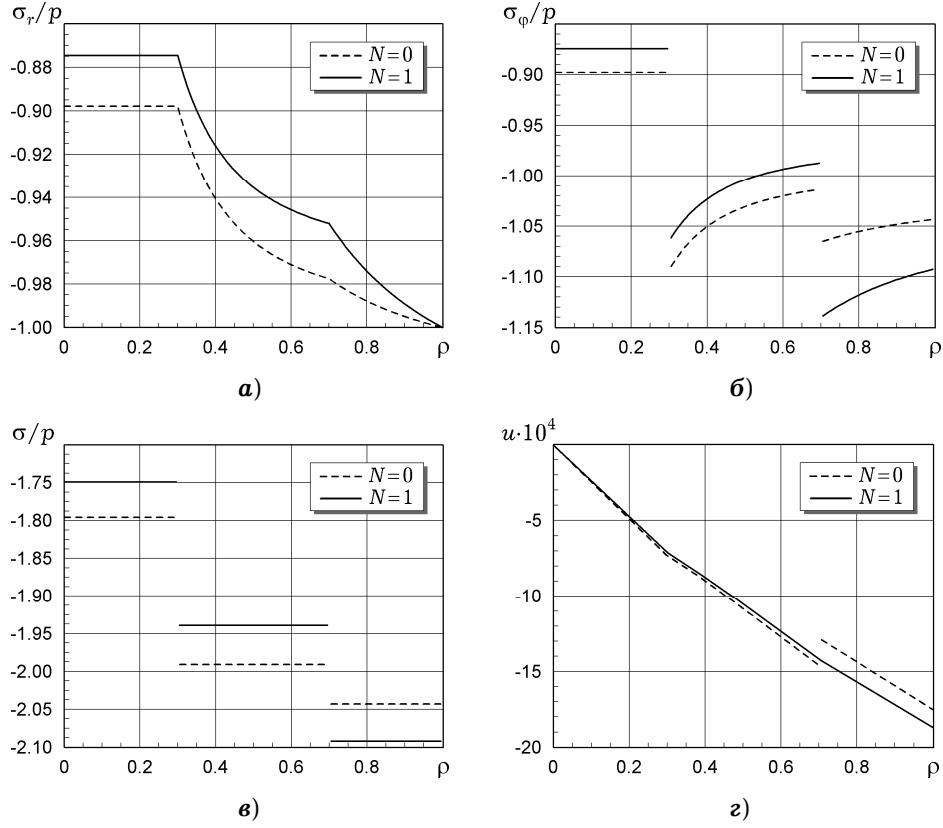


Рис. 1

З використанням (17) та (3), (11) отримаємо вирази для радіальних і колових напружень, а з урахуванням формул (8) – для радіальних переміщень:

$$\{\sigma_r(\rho), \sigma_\phi(\rho), u(\rho)\} = \sum_{m=1}^M \{\sigma_{r[m]}(\rho), \sigma_{\phi[m]}(\rho), u_{[m]}(\rho)\} S_m(\rho), \quad (18)$$

де

$$\sigma_{r[m]}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left( \int_{\rho_{m-1}}^{\rho} \eta \sigma_{[m]}(\eta) d\eta + \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} \eta \sigma_{[j]}(\eta) d\eta \right),$$

$$\sigma_{\phi[m]}(\rho) = \sigma_{[m]}(\rho) - \sigma_{r[m]}(\rho),$$

$$u_{[m]}(\rho) = \frac{\rho}{2G_{[m]}(\rho)} \left( (1 - \nu_{[m]}(\rho)) \sigma_{[m]}(\rho) - \sigma_{r[m]}(\rho) \right) + \rho \alpha_{[m]}(\rho) (1 + \nu_{[m]}(\rho)) T_{[m]}(\rho) - \rho \varepsilon_0 \nu_{[m]}(\rho).$$

**3. Приклади числових розрахунків.** Розглянемо використання побудованого розв'язку задачі теорії пружності,  $T(\rho) \equiv 0$ , для розрахунку напруженого стану в тришаровому циліндрі. При обчисленні напружень та переміщень використано формули (17), (18) із резольвентним ядром (16), де замість ряду повторних ядер взято початкову суму перших  $N$  доданків:

$$\mathcal{R}_{[m,n]}(\rho, \eta) \approx \mathcal{R}_{[m,n]}^N(\rho, \eta) = \sum_{\ell=0}^N \mathcal{K}_{[m,n]}^{\ell+1}(\rho, \eta). \quad (19)$$

На рис. 1 наведено розподіли радіальних (рис. 1а), колових (рис. 1б) та сумарних (рис. 1в) напружень, а також радіальних переміщень (г) у тришаровому циліндрі з поверхнями поділу шарів  $\rho_1 = 0.3$ ,  $\rho_2 = 0.7$  та пружними властивостями  $E_{[1]} = 200$  ГПа,  $\nu_{[1]} = 0.29$  (нержавіюча сталь) і  $E_{[3]} = 380$  ГПа,  $\nu_{[3]} = 0.25$  (оксид алюмінію) та  $E_{[2]} = (E_{[1]} + E_{[3]}) / 2$ ,  $\nu_{[2]} = (\nu_{[1]} + \nu_{[3]}) / 2$ . Обчислення зроблено при  $N = 0$  (замість резольвентного ядра (16) взято інтегральне ядро (14) ключового рівняння (13)) та  $N = 1$  у формулі (19). Обчислення показали, що шукані функції, розраховані з використанням формули (19) при  $N \geq 2$ , збігаються з розрахованими при  $N = 1$ . Розраховані радіальні та колові напруження збігаються з наведеними у роботі [27] для такого ж тришарового циліндра. Радіальні напруження (рис. 1а) є максимальними на навантаженій циліндричній поверхні  $\rho = 1$ , мають злами профілю залежності від радіальної координати на поверхнях розмежування шарів  $\rho = \rho_1$  та  $\rho = \rho_2$  і розподілені рівномірно у внутрішньому шарі  $\rho \in [0, \rho_1]$ . Колові напруження (рис. 1б) є розривними на поверхнях поділу шарів і сталими у внутрішньому шарі. При цьому максимальних за абсолютною величиною значень ці напруження досягають при наближенні до поверхні  $\rho = \rho_2$  у зовнішньому шарі. Сумарні напруження (рис. 1в) очікувано є розривними на поверхнях поділу шарів та сталими у кожному шарі. При цьому значення у зовнішньому шарі переважають значення у внутрішніх. Пружні переміщення (рис. 1г) природно дорівнюють нулеві на осі циліндра і є максимальними на навантаженій циліндричній поверхні. При цьому розраховані при  $N = 0$  переміщення не задовольняють умови (5). Однак вже наступне наближення забезпечує виконання умов ідеального контакту у контексті переміщень. Це може бути додатковим критерієм достатності вибраної величини параметра  $N$ .

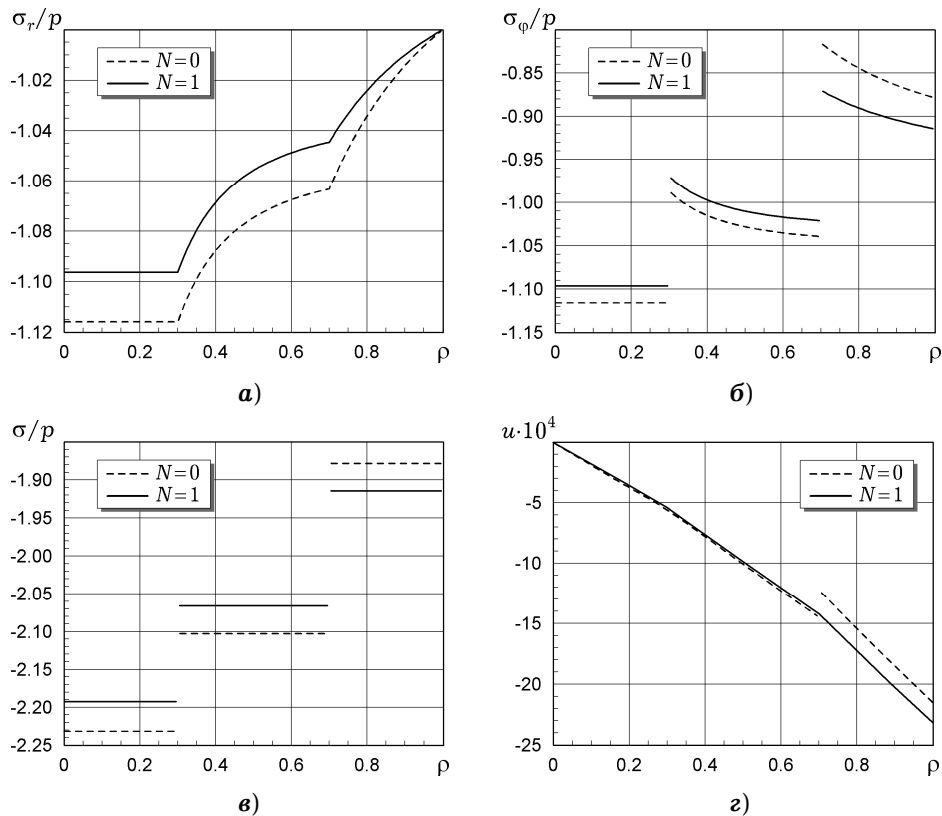


Рис. 2

На рис. 2 наведено компоненти напружено-деформованого стану у циліндрі такої самої конфігурації, у якому властивості внутрішнього шару є такими, як властивості зовнішнього шару у попередньому прикладі, і навпаки, тобто  $E_{[1]} = 380$  ГПа,  $\nu_{[1]} = 0.25$ ,  $E_{[3]} = 200$  ГПа,  $\nu_{[3]} = 0.29$ . Незважаючи на той факт, що переміщення (рис. 2а) мають аналогічний до рис. 1а розподіл, спостерігаємо суттєві відмінності у розподілі напружень. Насамперед варто зауважити, що для циліндра, зовнішній шар якого має менший модуль пружності, ніж внутрішні шари, спостерігаємо збільшення напружень на осі циліндра внаслідок обтиснення зовнішньої поверхні, у результаті чого радіальні напруження (рис. 2а) у внутрішньому шарі майже на 10% перевищують прикладені навантаження. Це саме стосується і колових напружень, сталі значення розподілу яких у внутрішньому шарі перевищує напруження в інших двох шарах рис. 2б.

**Висновки.** Запропоновано модифікацію алгоритму [16, 27] для побудови явних аналітичних розв'язків плоских осесиметричних задач теорії пружності й термопружності для нескінченно довгих суцільних циліндрів, складених з коаксіальних шарів, які перебувають в умовах ідеального контакту та можуть мати усі чи деякі характеристики залежні від радіальної координати. На відміну від оригінального підходу, за якого метод безпосереднього інтегрування застосовували до рівняння суцільності в напруженнях, внаслідок чого доводилося розв'язувати ключове рівняння в термінах узагальнених похідних, модифікований алгоритм спрямований на інтегрування рівняння суцільності у деформаціях, які внаслідок виконання умов ідеального контакту шарів є неперервними функціями, а відтак рівняння записано в термінах звичайних похідних. Розв'язування задач зведено до інтегрального рівняння, явний розв'язок якого побудовано з використанням кусково-змінного резольвентного ядра.

Роботу виконано у рамках двостороннього українсько-словацького науково-дослідного проекту (номер державної реєстрації 0122U002392).

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
2. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – Москва: Машиностроение, 1984. – 264 с.
3. Биргер И. А. Остаточные напряжения. – Москва: Машгиз, 1963. – 232 с.
4. Григolloк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин. – Москва: Машиностроение, 1988. – 288 с.
5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
6. Игнатков Д. А. Остаточные напряжения в неоднородных деталях. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 302 с.
7. Калиняк Б., Попович В. Напружений стан багат шарового термочутливого циліндра за умов асимптотичного теплового режиму // Машинознавство. – 2005. – № 2. – С. 22–30.
8. Калиняк Б. М., Токовий Ю. В., Ясінський А. В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформованих твердих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 3. – С. 28–42.

Te same: Kalynyak B. M., Tokovyy Yu. V., Yasinskyi A. V. Direct and inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of deformed solids // J. Math. Sci. – 2019. – 236, No. 1. – P. 21–34. – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3>.

9. Коляно Ю. М., Процюк Б. В. Термопружність багат шарового циліндра // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 8. – С. 718–721.
10. Кушнір Р. М. Використання методу узагальнених задач спряження в термопружності кусково-однорідних тіл при неідеальному контакті // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 1. – С. 108–116.

Te same: Kushnir R. M. Application of the method of generalized coupling problems in the thermoelasticity of piecewise-homogeneous bodies under nonideal



- contact // *J. Math. Sci.* – 1999. – **97**, No. 1. – P. 3854–3861.  
– <https://doi.org/10.1007/BF02364925>.
11. *Махоркін І. М., Махоркін М. І., Мастикаш Л. В.* Аналітично-числове визначення термопружного стану багатошарових трансформних тіл простої геометрії // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 133–139.
  12. *Нижлишин В. С., Киторогаз Т. В.* Плоские контактные задачи теории упругости для многослойных сред. – Москва: Вычисл. центр АН СССР, 1990. – 67 с.
  13. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 875 с.
  14. *Пэйгано Н.* (ред.) Межслойные эффекты в композитных материалах. – Москва: Мир, 1993. – 346 с.  
Te same: *Pagano N. J.* (Ed.) Interlaminar response of composite materials. – Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo: Elsevier, 1989. – vi+259 p.
  15. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
  16. *Токова Л. П., Ясінський А. В.* Напружений стан багатошарового неоднорідного циліндра за рівномірного стиску бічної поверхні // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 101–107.
  17. *Шевчук В. А., Калиняк Б. М.* Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покриттями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 6. – С. 35–41.  
Te same: *Shevchuk V. A., Kalynyak B. M.* Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings // *Mater. Sci.* – 2011. – **46**, No. 6. – P. 746–756. – <https://doi.org/10.1007/s11003-011-9348-y>.
  18. *Шевчук В. А.* Задача термопружності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 2. – С. 117–129.  
Te same: *Shevchuk V. A.* Problem of thermoelasticity for a cylinder with thin multilayer coating // *J. Math. Sci.* – 2019. – **243**, No. 1. – P. 145–161.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04532-2>.
  19. *Шевчук В. А.* Методологія дослідження термонапруженого стану тіл із тонкими багатошаровими покриттями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2021. – **64**, № 3. – С. 41–54.
  20. *Ewing W. M., Jardetzki W. S., Press F.* Elastic waves in layered media. – New York: McGraw Hill, 1957. – xi+380 p.
  21. *Krenev L. I., Aizikovich S. M., Tokovyy Y. V., Wang Y.-C.* Axisymmetric problem on the indentation of a hot circular punch into an arbitrarily nonhomogeneous half-space // *Int. J. Solids Struct.* – 2015. – **59**. – P. 18–28.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.12.017>.
  22. *Krenev L. I., Tokovyy Y. V., Aizikovich S. M., Seleznev N. M., Gorokhov S. V.* A numerical-analytical solution to the mixed boundary-value problem of the heat-conduction theory for arbitrarily inhomogeneous coatings // *Int. J. Therm. Sci.* – 2016. – **107**. – P. 56–65. – <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2016.03.023>.
  23. *Kushnir R. M., Yasinsky A. V., Tokovyy Y. V.* Effect of material properties in the direct and inverse thermomechanical analyses of multilayer functionally graded solids // *Adv. Eng. Mater.* – 2022. – **24**, No. 5. – Art. 2100875.  
– <https://doi.org/10.1002/adem.202100875>.
  24. *Mittal V.* Polymer layered silicate nanocomposites: a review // *Materials.* – 2009. – **2**, No. 3. – P. 992–1057. – <https://doi.org/10.3390/ma2030992>.
  25. *Saiyathibrahim A., Mohamed Nazirudeen S. S., Dhanapal P.* Processing techniques of functionally graded materials – a review // In: Proc. of Int. Conf. on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology (ICSSCET 2015). Vol. 1. – ASDF, India, 2015. – P. 98–105.
  26. *Sinha Ray S., Okamoto M.* Polymer/layered silicate nanocomposites: A review from preparation to processing // *Prog. Polym. Sci.* – 2003. – **28**, No. 11. – P. 1539–1641. – <https://doi.org/10.1016/j.progpolymsci.2003>.
  27. *Tokova L., Yasinsky A., Ma C.-C.* Effect of the layer inhomogeneity on the distribution of stresses and displacements in an elastic multilayer cylinder // *Acta Mechanica.* – 2017. – **228**, No. 8. – P. 2865–2877.  
– <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1519-8>.
  28. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* Elastic analysis of inhomogeneous solids: History and development in brief // *J. Mech.* – 2019. – **35**, No. 5. – P. 613–626.  
– <https://doi.org/10.1017/jmech.2018.57>.
  29. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2021. – xiii+342 p.

## INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF PLANE AXISYMMETRIC PROBLEMS OF ELASTICITY AND THERMOELASTICITY FOR LAYERED SOLID CYLINDERS

*A modification of the algorithm for constructing analytical solutions to the plane axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems in terms of stresses is suggested for solid cylinders assembled of radially-inhomogeneous coaxial layers. In contrast to the original approach which is based on the application of the direct integration method along with the apparatus of the generalized differentiation, the proposed modification allows for formulating and solving the governing equations of such problems in terms of the classical derivatives by the radial coordinate. In such manner, the procedure for derivation of the recurring kernels is simplified for constructing the resolvent solutions of the governing integral equation of continuity, which was obtained by using the direct integration method.*

**Key words:** *layered cylinder, inhomogeneous material, governing equations, resolvent kernels, exact solutions, direct integration method.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
26.05.22