УДК 539.3

В. І. Острик ✉

РОЗКЛИНЮВАННЯ ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ ВЗДОВЖ МЕЖОВОЇ НАПІВНЕСКІНЧЕННОЇ ТРІЩИНИ

Розглянуто рівновагу пружної півплощини, на межі якої розміщена напівнескінченна тріщина. Берег тріщини на певній відстані від її вершини контактує з жорстким напівнескінченним клином, а поблизу неї – із жорсткою основою. В області контакту берега тріщини та жорсткої основи враховано сили тертя. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено межі областей контакту, розподіли напружень у цих областях і на межі півплощини поза тріщиною, а також коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень.

Ключові слова: *розклинювання, межова тріщина, модель Комніноу, інтеграл Мелліна, метод Вінера – Гопфа, коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень.*

Задачі про розклинювання пружної однорідної площини розглянуто в роботах [1, 4, 10, 19, 22–25] (див. також огляди [13, 14, 18]). Розклинювання кусково-однорідної площини скінченним клином уздовж напівнескінченної або скінченної міжфазної тріщини з урахуванням гладкого контакту берегів тріщини біля її вершини за моделлю Комніноу [20] вивчено в роботах [14–16]. Нижче наведено розв'язання задачі про межове розклинювання півплощини напівнескінченним клином з невідомими заздалегідь межами областей гладкого контакту клина з берегом тріщини та фрикційного контакту між жорсткою основою та берегом тріщини в околі її вершини. Цю задачу можна розглядати як граничний випадок задачі про розклинювання кусково-однорідної площини, коли один із матеріалів є абсолютно жорстким.

1. Постановка задачі. Розглянемо пружну півплощину $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \pi$ з модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν, яка з'єднана вздовж променя $\vartheta = 0$ із жорсткою основою. Уздовж напівнескінченної тріщини $\vartheta = \pi$ площина розклинюється абсолютно жорстким клином ширини h (рис. 1). Край клина заокруглений так, що його ширина на краю плавно спадає за квадратичним законом, а його верхня грань зрізана вздовж параболи радіуса кривини R у своїй вершині. Вважаємо, що верхня грань клина гладко контактує з берегом тріщини на інтервалі $r_1 \le r < \infty$. Відстань r_1 від вершини тріщини до області контакту $r_1 \le r < \infty$, $\vartheta = \pi$ заздалегідь невідома, а відстань r_2 до незрізаної частини клина задана. Вважаємо також, що, згідно з моделлю Комніноу [20], поблизу вершини тріщини її береги контактують в області $0 < r \le r_0$ невідомого розміру r_0, де нормальні та дотичні напруження пов'язані законом тертя Амонтона.

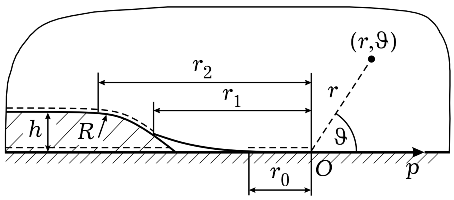

Рис. 1

Крайові умови задачі запишемо у вигляді

$$u_r\big|_{\vartheta=0} = 0, \qquad u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = 0, \qquad 0 \le r < \infty,$$

$$u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = 0, \qquad \tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\pi} = \mu_0\,\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi}, \qquad 0 < r \le r_0,$$

$$\tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\pi} = 0, \qquad r_0 < r < \infty, \qquad \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = 0, \qquad r_0 < r < r_1,$$

✉ v.i.ostryk@gmail.com

$$u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = -h + \frac{1}{2R}(r - r_2)^2 H(r_2 - r), \qquad r_1 \le r < \infty, \tag{1}$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя, $H(r)$ – функція Гевісайда. Знак при μ_0 у четвертій умові із (1) вибрано за припущення, що точки берега тріщини, які знаходяться у контакті з основою, рухаються у напрямку від вершини тріщини, тобто

$$u_r\big|_{\vartheta=\pi} > 0, \qquad 0 < r \le r_0, \tag{2}$$

що необхідно перевірити при розв'язанні задачі.

2. Інтегральне рівняння задачі. Розглянемо основну змішану задачу для пружної півплощини з однією точкою ($r = 0$) зміни крайових умов. Крайові умови цієї задачі складаються з перших двох із умов (1) і таких умов:

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = \sigma(r), \qquad \tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\pi} = \tau(r), \qquad 0 \le r < \infty. \tag{3}$$

Розв'язок задачі отримуємо методом інтегрального перетворення Мелліна за радіальною координатою r. На межі півплощини, зокрема, маємо

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = -\frac{1-\nu}{(3-4\nu)\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}[2(1-\nu)\bar\sigma(s)\cos\pi s - (1-2\nu)\bar\tau(s)\sin\pi s]\frac{r^{-s-1}}{\Delta(s)}\,ds,$$

$$\tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = -\frac{1-\nu}{(3-4\nu)\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}[(1-2\nu)\bar\sigma(s)\sin\pi s + 2(1-\nu)\bar\tau(s)\cos\pi s]\frac{r^{-s-1}}{\Delta(s)}\,ds,$$

$$2G\,u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}[2(1-\nu)\bar\sigma(s)\cos\pi s - (1-2\nu)\bar\tau(s)\sin\pi s]\frac{r^{-s}}{s\Delta(s)}\,ds,$$

$$2G\,u_r\big|_{\vartheta=\pi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}[(1-2\nu)\bar\sigma(s)\sin\pi s + 2(1-\nu)\bar\tau(s)\cos\pi s]\frac{r^{-s}}{s\Delta(s)}\,ds,$$

$$\bar\sigma(s) = \int_0^\infty \sigma(y)y^s\,dy, \qquad \bar\tau(s) = \int_0^\infty \tau(y)y^s\,dy, \qquad -\frac{1}{2} < c < 0,$$

$$\Delta(s) = \cos\pi(s + i\theta)\cos\pi(s - i\theta), \qquad \theta = \frac{1}{2\pi}\ln(3-4\nu). \tag{4}$$

Зауважимо, що розв'язок (4) можна також отримати із розв'язку відповідної змішаної задачі для клина [12], поклавши кут розхилу клина рівним π, або із розв'язку аналогічної задачі для двох спряжених півплощин [6, 8], одна з яких є абсолютно жорсткою.

Введемо невідому функцію контактного тиску

$$q(r) = \begin{cases} -\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi}, & 0 < r \le r_0, \\ 0, & r_0 < r < r_1, \\ -\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi}, & r_1 \le r < \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Поклавши у (4), згідно з (5) і четвертою, п'ятою та шостою рівністю із (1),

$$\bar\sigma(s) = -\left(\int_0^{r_0} + \int_{r_1}^\infty\right) q(y)y^s\,dy, \qquad \bar\tau(s) = -\mu_0\int_0^{r_0} q(y)y^s\,dy,$$

виконаємо всі крайові умови з (1), окрім третьої та останньої умови на колові переміщення в областях контакту.

Підставимо колові переміщення $u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi}$ із (4) у третю та останню з умов (1), виконаємо заміни

$$s = -i\tau, \qquad r = r_0 e^{-\xi}, \qquad y = r_0 e^{-\eta}, \qquad r_1 = r_0 e^{a}, \qquad r_2 = r_0 e^{b}, \tag{7}$$

і, поклавши $q(r) = \dfrac{hp}{r} + q^*(r)$, де p – невідома стала, а $q^*(r) = o(r^{-1})$, $r \to \infty$, перейдемо до нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2G} q(r_0 e^{-\eta}) e^{-\eta}, & 0 < \eta < \infty, \\ \dfrac{1}{2G} q^*(r_0 e^{-\eta}) e^{-\eta}, & -\infty < \eta < -a. \end{cases} \tag{8}$$

Отримаємо інтегральне рівняння

$$L(\xi) \equiv \int\limits_0^{\infty} k_0(\xi - \eta)\varphi(\eta)\,d\eta + \int\limits_{-\infty}^{-a} k_1(\xi - \eta)\varphi(\eta)\,d\eta = f(\xi),$$

$$0 < \xi < \infty, \qquad -\infty < \xi < -a, \tag{9}$$

де

$$k_j(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_j(\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)}\,d\tau, \qquad \mathcal{K}_j(\tau) = \frac{\lambda_j(\tau)}{\tau\Delta(i\tau)}, \quad j = 0,1,$$

$$\lambda_0(\tau) = D \operatorname{sh} \pi\tau \operatorname{ch} \pi(\tau + i\gamma), \qquad \lambda_1(\tau) = (1 - \nu)\operatorname{sh} 2\pi\tau,$$

$$D = \sqrt{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2\mu_0^2}, \qquad \gamma = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{(1-2\nu)\mu_0}{2(1-\nu)},$$

$$f(\xi) = \left.\begin{cases} 0, & 0 < \xi < \infty \\ \dfrac{h}{r_0} - \dfrac{r_0}{2R}(e^b - e^{-\xi})^2 H(\xi + b), & -\infty < \xi < -a \end{cases}\right\} -$$

$$- \frac{\bar{p}}{2\pi i} \int\limits_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\mathcal{K}_1(\tau)}{\tau} e^{-i\tau(\xi+a)}\,d\tau, \qquad \bar{p} = \frac{hp}{2Gr_0}.$$

Праву частину інтегрального рівняння (9) після перетворення інтеграла за теорією лишків подамо у вигляді

$$f(\xi) = \left.\begin{cases} 0, & 0 < \xi < \infty \\ \dfrac{h}{r_0} - \dfrac{3-4\nu}{2(1-\nu)}\pi\bar{p} - \dfrac{r_0}{2R}(e^b - e^{-\xi})^2 H(\xi + b), & -\infty < \xi < -a \end{cases}\right\} -$$

$$- \operatorname{sgn}\xi \cdot \bar{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i\lambda_1(is_k)}{s_k^2 \Delta'(s_k)} e^{-s_k|\xi+a|}, \tag{10}$$

де s_k – корені рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$: $s_{2k-1} = s_k^+$, $s_{2k} = s_k^-$, $s_k^{\pm} = k - \dfrac{1}{2} \pm i\theta$, $k = 1, 2, \ldots$. Із умови $f(-\infty) = 0$, що еквівалентна асимптотичній рівності $u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} \sim -h$, $r \to \infty$, яка, в свою чергу, випливає з останньої із крайових умов (1), знаходимо

$$p = \frac{4(1-\nu)}{3-4\nu}\frac{G}{\pi}. \tag{11}$$

3. Розв’язання інтегрального рівняння. Інтегральне рівняння (9) із застосуванням методу Вінера – Гопфа [5, 11] зведемо до нескінченної системи алгебричних рівнянь.

Продовжимо рівняння (9) на всю числову вісь, поклавши $\varphi(\xi) = 0$, коли $-a \le \xi \le 0$, і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур’є. Введемо невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \varphi(\xi) e^{iz\xi}\, d\xi, \qquad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^0 \varphi(\xi - a) e^{iz\xi}\, d\xi,$$

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^a L(\xi - a) e^{iz\xi}\, d\xi, \quad \Psi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^0 L(\xi) e^{iz\xi}\, d\xi, \tag{12}$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ ($c^+ < 0$), $\operatorname{Im} z < c^-$ ($c^- > 0$). Зокрема, функції $\Psi^+(z)$, $\Psi^-(z)$ є цілими. Після застосування теореми про згортку отримаємо систему функціональних рівнянь

$$\mathcal{K}_0(z)\Phi^+(z) + e^{-iza}\mathcal{K}_1(z)\Phi^-(z) - \Psi^-(z) = F(z),$$

$$\Psi^+(z) = e^{iza}\Psi^-(z), \qquad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-, \tag{13}$$

права частина якої має вигляд

$$F(z) = F^+(z) + e^{-iza}F^-(z),$$

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty f(\xi) e^{iz\xi}\, d\xi = -\frac{\bar{p}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{i\lambda_1(is_k)}{s_k^2 \Delta'(s_k)(s_k - iz)} e^{-s_k a},$$

$$F^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^0 f(\xi - a) e^{iz\xi}\, d\xi = \frac{\bar{p}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{i\lambda_1(is_k)}{s_k^2 \Delta'(s_k)(s_k + iz)} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_2^2}{2Rr_0} \left(\frac{1 - e^{iz(a-b)}}{iz} + 2\frac{e^{a-b} - e^{iz(a-b)}}{1 - iz} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{2(a-b)} - e^{iz(a-b)}}{2 - iz} \right). \tag{14}$$

Факторизуємо коефіцієнти $\mathcal{K}_0(z)$, $\mathcal{K}_1(z)$ системи (13):

$$\mathcal{K}_0(z) = \mathcal{K}_0^+(z)\mathcal{K}_0^-(z), \qquad \mathcal{K}_1(z) = \mathcal{K}_1^+(z)\mathcal{K}_1^-(z),$$

$$\mathcal{K}_0^+(z) = D\frac{\Gamma(s_1 - iz)\Gamma(s_2 - iz)}{\Gamma(1 - iz)\Gamma(1/2 - iz + \gamma)}, \qquad \mathcal{K}_0^-(z) = \frac{\Gamma(s_1 + iz)\Gamma(s_2 + iz)}{\Gamma(1 + iz)\Gamma(1/2 + iz - \gamma)},$$

$$\mathcal{K}_1^+(z) \equiv 2(1 - \nu)\mathcal{K}_1^-(-z), \qquad \mathcal{K}_1^-(z) = \frac{\Gamma(s_1 + iz)\Gamma(s_2 + iz)}{\Gamma(1 + iz)\Gamma(1/2 + iz)}. \tag{15}$$

Функції $\mathcal{K}_0^+(z)$, $\mathcal{K}_1^+(z)$ є аналітичними і не приймають нульових значень у півплощині $\operatorname{Im} z > c^+$, а функції $\mathcal{K}_0^-(z)$, $\mathcal{K}_1^-(z)$ – у півплощині $\operatorname{Im} z < c^-$. Після цього систему функціональних рівнянь (13) запишемо так ($c^+ < \operatorname{Im} z < c^-$):

$$\mathcal{K}_0^+(z)\Phi^+(z) + e^{-iza}\frac{\mathcal{K}_1(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)}\Phi^-(z) - \frac{\Psi^-(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)} = \frac{F^+(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)} + e^{-iza}\frac{F^-(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)},$$

$$\mathcal{K}_1^-(z)\Phi^-(z) + e^{iza}\frac{\mathcal{K}_0(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)}\Phi^+(z) - \frac{\Psi^+(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)} = \frac{F^-(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)} + e^{iza}\frac{F^+(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)}. \tag{16}$$

Другі доданки лівої та перші доданки правої частини кожного із рівнянь (16) подамо як різниці аналітичних у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$, $\operatorname{Im} z < c^-$ функцій:

$$e^{-iza}\frac{\mathcal{K}_1(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)}\Phi^-(z)=\chi_0^+(z)-\chi_0^-(z),\qquad -e^{iza}\frac{\mathcal{K}_0(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)}\Phi^+(z)=\chi_1^+(z)-\chi_1^-(z),$$

$$\frac{F^+(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)}=f_0^+(z)-f_0^-(z),\qquad\qquad \frac{F^-(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)}=f_1^+(z)-f_1^-(z). \tag{17}$$

Ці функції визначимо, подавши їх інтегралами типу Коші вздовж дійсної осі. Розвинувши інтеграли у ряди за лишками підінтегральних функцій, знаходимо

$$\chi_0^+(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\lambda_1(is_k)\Phi^-(-is_k)e^{-s_k a}}{s_k\Delta'(s_k)\mathcal{K}_0^-(-is_k)(s_k-iz)},$$

$$\chi_1^-(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\lambda_0(is_k)\Phi^+(is_k)e^{-s_k a}}{s_k\Delta'(s_k)\mathcal{K}_1^+(is_k)(s_k+iz)},$$

$$f_0^+(z)=\frac{\bar{p}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_1(is_k)e^{-s_k a}}{is_k^2\Delta'(s_k)\mathcal{K}_0^-(-is_k)(s_k-iz)},$$

$$f_1^-(z)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{r_2^2}{Rr_0}\frac{e^{iz(a-b)}}{iz(1-iz)(2-iz)\mathcal{K}_1^+(z)}+\tilde{f}_1^-(z),$$

$$\tilde{f}_1^-(z)=\frac{\bar{p}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathcal{K}_1^-(z)-\mathcal{K}_1^-(0)}{iz}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{r_2^2}{2Rr_0}\left(\frac{1}{i\mathcal{K}_1^+(0)z}+\right.$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\frac{\gamma_m}{m-iz}\left(d_m+\frac{1}{m-iz}\right)-$$
$$\left.-\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq 2,4}}^{\infty}\frac{2\Delta(\delta_k)\mathcal{K}_1^-(-i\delta_k)e^{\delta_k(a-b)}}{(\delta_k-1)(\delta_k-2)\lambda_1'(i\delta_k)(\delta_k-iz)}\right), \tag{18}$$

де

$$\gamma_1=-\frac{4|s_1|^2}{\sqrt{\pi(3-4\nu)}}e^{a-b},\qquad \gamma_2=-\frac{1}{3}|s_3|^2e^{a-b}\gamma_1,\qquad \psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

$$d_m=b-a+2m-3+2\operatorname{Re}\psi(m+s_1)-\psi(m+1)-\psi(m+1/2),\ m=1,2,$$

Тут δ_k – корені рівняння $\lambda_1(is)=0$ із півплощини $\operatorname{Re}s>0$: $\delta_k=\frac{k}{2}$, $k=1,2,\ldots$.

Таким чином, систему функціональних рівнянь (13) зводимо до вигляду

$$\mathcal{K}_0^+(z)\Phi^+(z)+\chi_0^+(z)-f_0^+(z)=\frac{\Psi^-(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)}+\chi_0^-(z)-f_0^-(z)+e^{-iza}\frac{F^-(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)},$$

$$\mathcal{K}_1^-(z)\Phi^-(z)+\chi_1^-(z)+f_1^-(z)=\frac{\Psi^+(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)}+\chi_1^+(z)+f_1^+(z)+e^{iza}\frac{F^+(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)},$$

$$c^+<\operatorname{Im}z<c^-. \tag{19}$$

Для кожного із рівнянь (19) ліва і права частини аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і є довільною цілою функцією. Із асимптотичних оцінок

$$\mathcal{K}_0^+(z) = O(z^{-1/2-\gamma}), \qquad \mathcal{K}_1^-(z) = O(z^{-1/2}), \qquad \Phi^{\pm}(z) = o(1),$$

$$\{\chi_0^+(z), \chi_1^-(z), f_0^+(z), f_1^-(z)\} = O(z^{-1}), \qquad |z| \to \infty, \tag{20}$$

випливає, що обидві частини кожного із рівнянь (19) тотожно дорівнюють нулеві. Звідси знаходимо

$$\Phi^+(z) = \frac{f_0^+(z) - \chi_0^+(z)}{\mathcal{K}_0^+(z)}, \qquad \Psi^-(z) = \mathcal{K}_0^-(z)\left[f_0^-(z) - \chi_0^-(z)\right] - e^{-iza}F^-(z),$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{f_1^-(z) + \chi_1^-(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)}, \qquad \Psi^+(z) = -\mathcal{K}_1^+(z)\left[f_1^+(z) + \chi_1^+(z)\right] - e^{iza}F^+(z). \tag{21}$$

Крім того, з умови обмеженості контактних напружень у точках $r = r_0$, $r = r_1$, $\vartheta = \pi$, що еквівалентно оцінкам $\Phi^{\pm}(z) = o(z^{-1})$, $|z| \to \infty$, маємо дві додаткові умови:

$$\lim_{|z|\to\infty} z\left[f_0^+(z) - \chi_0^+(z)\right] = 0, \qquad \lim_{|z|\to\infty} z\left[f_1^-(z) + \chi_1^-(z)\right] = 0. \tag{22}$$

Рівності (21) ще не визначають шукані функції, а лише виражають їх, з огляду на вирази для $\chi_0^+(z)$, $\chi_1^-(z)$ із (18), через невідомі значення цих функцій у нескінченній множині точок z. Для знаходження останніх візьмемо у першій із рівностей (21) $z = is_n$, а у четвертій – $z = -is_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Відносно невідомих

$$z_k^+ = \Phi^+(is_k), \qquad z_k^- = \Phi^-(-is_k) + \frac{\overline{p}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{s_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^- z_k^-}{s_k + s_n} = 0, \qquad z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+ z_k^+}{s_k + s_n} = g_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

з такими коефіцієнтами:

$$\alpha_k^+ = \frac{i\lambda_0(is_k)e^{-s_k a}}{s_k \Delta'(s_k)\mathcal{K}_1^+(is_k)}, \qquad \alpha_k^- = \frac{i\lambda_1(is_k)e^{-s_k a}}{s_k \Delta'(s_k)\mathcal{K}_0^-(-is_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\beta_n^+ = \frac{1}{\mathcal{K}_0^+(is_n)}, \qquad \beta_n^- = \frac{1}{\mathcal{K}_1^-(-is_n)},$$

$$g_n = \beta_n^- \left(\frac{\overline{p}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathcal{K}_1^-(0)}{s_n} - \tilde{f}_1^-(-is_n)\right), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Додаткові умови (22) набувають вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^- z_k^- = 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^+ z_k^+ = \frac{\overline{p}}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{K}_1^-(0) - \lim_{|z|\to\infty} iz\tilde{f}_1^-(z) \tag{26}$$

і слугують для знаходження невідомих параметрів a і b, які, в свою чергу, визначають відносні розміри $\frac{r_0}{r_2} = e^{-b}$, $\frac{r_1}{r_2} = e^{a-b}$.

Система рівнянь (24), (26) з експоненціально спадними за k коефіцієнтами є регулярною типу Пуанкаре – Коха і тому може бути ефективно розв'язана методами редукції і послідовних наближень. Числовий аналіз цієї системи рівнянь показує, що відносна довжина $\overline{r}_0 = \frac{r_0}{r_2}$ області контакту берегів тріщини біля її вершини є вкрай малою, меншою ніж 10−6. Тому отримані вище співвідношення з високою точністю (порядку $\overline{r}_0$) можуть бути асимптотично спрощені. Нехтуючи множником e^{-a} порівняно з 1 у формулах (25), отримаємо $\alpha_k^{\pm} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Тоді з рівнянь (24) визначаємо

$$z_n^+ = 0, \qquad z_n^- = g_n, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Із першої умови (26) з урахуванням (27) отримаємо рівняння

$$\operatorname{Re} \frac{i\lambda_1(is_1) g_1 e^{-s_1 a}}{s_1 \Delta'(s_1) \mathcal{K}_0^-(-is_1)} = 0 ,$$

яке перетворимо до вигляду

$$\cos\left(\theta(a + 2\ln 2) - \arg \frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta) g_1}{\Gamma(1+i\theta)} \right) = 0 . \tag{28}$$

Вибравши корінь $\dfrac{\pi}{2}$ цього рівняння, знаходимо розмір області контакту берегів тріщини біля її вершини:

$$r_0 = r_2 e^{-b}, \qquad b = \frac{\pi}{2\theta} + \frac{1}{\theta} \arg\left(\frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)} g_1 e^{i\theta(b-a-2\ln 2)} \right). \tag{29}$$

Різницю параметрів $a - b$ визначимо нижче. Інші корені рівняння (28) виключаємо із розгляду, оскільки вони не мають фізичного змісту: від'ємні корені відповідають розмірам області контакту, які перевищують відстань r_2, а додатні корені, крім $\dfrac{\pi}{2}$, відповідають взаємному перекриттю берегів тріщини поза областю контакту [17].

Із другої умови (26) отримуємо трансцендентне рівняння

$$\overline{p}\mathcal{K}_1^-(0) - \frac{r_2^2}{2Rr_0}\left(\frac{1}{\mathcal{K}_1^+(0)} - \sum_{m=1}^{2} \gamma_m d_m e^{m(a-b)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq 2,4}}^{\infty} \frac{2\Delta(\delta_k)\mathcal{K}_1^-(-i\delta_k) e^{\delta_k(a-b)}}{(\delta_k - 1)(\delta_k - 2)\lambda_1'(i\delta_k)} \right) = 0 \tag{30}$$

для визначення відносної відстані $\overline{r}_1 = \dfrac{r_1}{r_2} = e^{a-b}$ від вершини тріщини до точки входження у контакт берега тріщини із клином.

У випадку прямокутного клина ($R = 0$) маємо $r_1 = r_2$, $a = b$, а також

$$F^-(z) = \frac{\overline{p}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i\lambda_1(is_k)}{s_k^2 \Delta'(s_k)(s_k + iz)}, \qquad f_1^-(z) = \tilde{f}_1^-(z) = \frac{\overline{p}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathcal{K}_1^-(z) - \mathcal{K}_1^-(0)}{iz},$$

$$g_1 = \overline{p}\mathcal{K}_1^-(0) \cdot 2^{-1/2-2i\theta}, \tag{31}$$

і тоді для розміру області контакту берегів тріщини біля її вершини замість (29) маємо

$$r_0 = r_2 e^{-b}, \qquad b = \frac{\pi}{2\theta} - 4\ln 2 + \frac{1}{\theta} \arg \frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)} . \tag{32}$$

Цей розмір є у 4 рази більшим, ніж у задачі про розкриття межової напівнескінченної тріщини нормальною зосередженою силою, прикладеною до берега тріщини на відстані r_2 від її вершини [8], і у 2 рази більший, ніж в аналогічній задачі для скінченної тріщини довжини $2r_2$ [6]. За відсутності тертя ($\mu_0 = 0$, $\gamma = 0$) цей розмір становить

$$r_0 = r_0^0 = 16 e^{-\pi/(2\theta)} r_2 . \tag{33}$$

З огляду на (32), (33) у загальному випадку заокругленого клина ($R \neq 0$) розмір r_0 області контакту подамо у вигляді

$$r_0 = \rho_R \rho_\mu r_0^0 , \qquad \rho_R = \frac{r_0}{r_0\big|_{R=0}} = 4 \exp\left(a - b - \frac{1}{\theta} \arg g_1 \right),$$

$$\rho_\mu = \frac{r_0}{r_0\big|_{\mu_0=0}} = \exp\left(-\frac{1}{\theta} \arg \frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)} \right). \tag{34}$$

Тут коефіцієнти ρ_R, ρ_μ характеризують вплив відповідно радіуса кривини R заокругленого краю клина у точці $r = r_2$ і коефіцієнта тертя μ_0 на розмір r_0 порівняно з його величиною r_0^0 із (33), коли відсутні як заокруглення клина ($R = 0$), так і тертя ($\mu_0 = 0$).

4. Напруження та переміщення на межі півплощини. З огляду на заміни (5), (7), (8), контактні напруження між берегами тріщини та між клином і одним із берегів тріщини виражаються через розв'язок інтегрального рівняння (9):

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = -2Ge^{\xi}\varphi(\xi) - \begin{cases} 0, & 0 < r < r_0, \qquad 0 < \xi < \infty, \\ \dfrac{hp}{r}, & r_1 < r < \infty, \qquad -\infty < \xi < -a. \end{cases} \tag{35}$$

Застосуванням оберненого перетворення Фур'є до перших двох рівностей із (12) маємо

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\tau) e^{-i\tau\xi}\, d\tau, & 0 < \xi < \infty, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\tau) e^{-i\tau(\xi+a)} d\tau, & -\infty < \xi < -a. \end{cases} \tag{36}$$

Підставивши у (36) знайдені функції $\Phi^+(\tau)$, $\Phi^-(\tau)$ із (21) і перетворивши інтеграли у ряди за теорією лишків, отримаємо контактні напруження

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = A\left[\frac{1}{\Gamma(3/2-\gamma)}\, {}_2F_1\left(s_1, \bar{s}_1; \frac{3}{2}-\gamma; \frac{r}{r_0} \right) - \frac{1}{\Gamma(1/2+\gamma)\left|\Gamma(1-\gamma+i\theta)\right|^2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\theta}\, {}_2F_1\left(\gamma+i\theta, \gamma-i\theta; \frac{1}{2}+\gamma; \frac{r}{r_0} \right)\left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1/2+\gamma} \right],$$

$$0 < r < r_0 ,$$

$$A = \frac{2\sqrt{2}(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}} \pi G \theta e^{-a/2} \left| \frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)} g_1 \right|,$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi} = -\bar{p}\frac{r_0}{r} + \frac{2(1-\nu)}{3-4\nu}\frac{r_2^2}{\pi R r}\left\{ \frac{1}{2} - \frac{r}{r_2} + \frac{r}{r_2}\left(1-\frac{r}{r_2}\right)\ln\left|\frac{r_2}{r}-1\right| - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right)^2 \left[2\sqrt{\frac{r}{r_2}}\left(\frac{2}{3}-\frac{r}{r_2}\right) + \frac{r}{r_2}\left(1-\frac{r}{r_2}\right)\ln\left|\frac{\sqrt{r_2}-\sqrt{r}}{\sqrt{r_2}+\sqrt{r}}\right| \right] \right\} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-\nu}\frac{r_0}{r}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\delta_k\Delta(\delta_k)\mathcal{K}_1^+(i\delta_k)\tilde{f}_1^-(i\delta_k)\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\delta_k},$$

$$r_1 < r < \infty. \qquad (37)$$

де ${}_2F_1(a_1,\ a_2;\ a_3;\ z)$ – гіпергеометрична функція Ґаусса. Як випливає із першої формули (37), контактні напруження необмежені в околі вершини тріщини і є пропорційними до величини $r^{-1/2+\gamma}$. Разом з тим, розподіл цих напружень з точністю до сталого множника збігається з відповідним розподілом для міжфазної напівнескінченної тріщини, до берегів якої прикладено нормальні зосереджені сили [8].

За відсутності тертя ($\mu_0 = 0$, $\gamma = 0$) гіпергеометричні функції у першій із рівностей (37) виражаються через елементарні функції [2], і ця рівність спрощується до такої:

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = -\frac{A}{2(1-\nu)\theta}\sqrt{\frac{(3-4\nu)r_0}{\pi r}}\,\mathrm{sh}\left(2\theta\arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right), \qquad 0 < r < r_0. \qquad (38)$$

Знайдемо контактні напруження між клином і берегом тріщини $r_1 < r < \infty$, $\vartheta = \pi$ у випадку прямокутного клина ($R = 0$):

$$\varphi(\xi) = \frac{\bar{p}\mathcal{K}_1^-(0)}{2\pi(1-\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Delta(\delta_k)\mathcal{K}_1^+(i\delta_k)e^{\delta_k(\xi+a)} =$$

$$= \frac{2\bar{p}\mathcal{K}_1^-(0)}{\sqrt{\pi(3-4\nu)}}\left\{(1-\nu)\left[{}_2F_1\left(s_1,\ \bar{s}_1;\ \frac{1}{2};\ e^{\xi+a}\right)-1\right]-\right.$$

$$\left.-(1-2\nu)\theta\,{}_2F_1\left(1+i\theta,\ 1-i\theta;\ \frac{3}{2};\ e^{\xi+a}\right)\right\}, \quad -\infty<\xi<-a. \qquad (39)$$

Виразимо гіпергеометричні функції із (39) через елементарні [2] і підставимо після такого перетворення функцію $\varphi(\xi)$ у рівність (35):

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = -\frac{2Gh}{\pi\sqrt{(3-4\nu)r(r-r_1)}}\,\mathrm{ch}\left(2\theta\arccos\sqrt{\frac{r_1}{r}}\right), \quad r_1 < r < \infty. \qquad (40)$$

Напруження на лінії продовження тріщини на підставі перших двох рівностей із (4) запишемо у вигляді комплексної комбінації:

$$(\sigma_\vartheta + i\tau_{r\vartheta})\big|_{\vartheta=0} = -\frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}[\bar{\sigma}_1(s)+i\bar{\tau}_1(s)]\frac{r^{-s-1}}{\cos\pi(s+i\theta)}\,ds \qquad (41)$$

та виразимо їх через розв’язок (21) системи функціональних рівнянь (13):

$$\frac{1}{2G}(\sigma_\vartheta + i\tau_{r\vartheta})\big|_{\vartheta=0} = \frac{\sqrt{2}(1-\nu)}{\sqrt{\pi(3-4\nu)}}e^{\xi}\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic}\left\{(1+i\mu_0)\Phi^+(\tau)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\bar{p}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\tau}+\Phi^-(\tau)\right]e^{-i\tau a}\right\}\frac{e^{-i\tau\xi}}{\mathrm{ch}\,\pi(\tau-\theta)}. \qquad (42)$$

Перетворивши інтеграл із (42) за теорією лишків, зокрема, в околі вершини тріщини отримуємо

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = \frac{A}{\Gamma(3/2-\gamma)}{}_2F_1\left(s_1,\ \bar{s}_1;\ \frac{3}{2}-\gamma;\ -\frac{r}{r_0}\right),$$

$$\tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = \mu_0\,\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=0} - \frac{A\Gamma(1/2-\gamma)}{|\Gamma(1-\gamma+i\theta)|^2\,\mathrm{sh}\,\pi\theta}\times$$

$$\times {}_2F_1\left(\gamma + i\theta,\ \gamma - i\theta;\ \frac{1}{2} + \gamma;\ -\frac{r}{r_0}\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1/2+\gamma},\quad 0 < r < r_0, \quad (43)$$

та знаходимо відповідну асимптотичну поведінку напружень:

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=0} \sim \frac{A}{\Gamma(3/2-\gamma)},$$

$$\tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=0} \sim -\frac{A\Gamma(1/2-\gamma)}{|\Gamma(1-\gamma+i\theta)|^2 \operatorname{sh}\pi\theta}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1/2+\gamma}, \qquad r \to 0. \qquad (44)$$

На продовженні тріщини в околі її вершини нормальні напруження є скінченними, а дотичні напруження є необмеженими з характерною для моделі Комніноу фрикційного контакту берегів міжфазної тріщини особливістю порядку $1/2-\gamma$ [9, 20].

Із другої формули (44) визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_{II} = -\sqrt{2\pi r_2 r_0}\lim_{r\to 0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2-\gamma}\tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = \frac{A\sqrt{2\pi r_2 r_0}\,\Gamma(1/2-\gamma)}{|\Gamma(1-\gamma+i\theta)|^2\operatorname{sh}\pi\theta}. \qquad (45)$$

Розподіли напружень і переміщень всередині півплощини поблизу вершини тріщини визначаються через коефіцієнт K_{II} за відомими формулами [7, 20].

У випадку прямокутного клина ($R = 0$) коефіцієнт

$$K_{II} = \sqrt{2(3-4\nu)}\,\frac{\pi\theta\Gamma(1/2-\gamma)\operatorname{cth}\pi\theta}{|\Gamma(1+i\theta)\Gamma(1-\gamma+i\theta)|}Gh \qquad (46)$$

є таким самим, як і у задачі про розкриття межової напівнескінченної тріщини нормальною силою $P = \sqrt{3-4\nu}Gh$ [8]. У цьому випадку за відсутності тертя маємо

$$K_{II} = K_{II}^0 = 2\sqrt{2\pi}(1-\nu)Gh. \qquad (47)$$

Коефіцієнт K_{II} із (45) з огляду на (46), (47) подамо у вигляді

$$K_{II} = k_R k_\mu K_{II}^0,$$

$$k_R = \frac{K_{II}}{K_{II}\big|_{R=0}} = \left|1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{\bar p}\frac{s_1}{\mathcal{K}_1^-(0)}\tilde f_1^-(-is_1)\right|\sqrt{\frac{r_2}{r_1}},$$

$$k_\mu = \frac{K_{II}}{K_{II}\big|_{\mu_0=0}} = \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\sqrt{\pi}}\left|\frac{\Gamma(1+i\theta)}{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}\right|. \qquad (48)$$

Для перевірки умови (2) знайдемо радіальні переміщення в області контакту берегів тріщини. Аналогічно до формул (43) отримуємо

$$u_r\big|_{\vartheta=\pi} = \sqrt{2(1+\mu_0^2)r_0 r_1}\,\frac{\pi\theta(1-\nu)\sin\pi\gamma}{\Gamma(3/2+\gamma)\mu_0\operatorname{sh}\pi\theta}\left|\frac{\Gamma(\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)}g_1\right| \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\gamma+i\theta, \gamma-i\theta; \frac{3}{2}+\gamma; \frac{r}{r_0}\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2+\gamma},\quad 0 < r \le r_0. \quad (49)$$

Гіпергеометрична функція із рівності (49) за заданих значень своїх параметрів і аргументу приймає дійсні додатні значення на проміжку $0 < r \le r_0$. Отже, умова (2) виконується, і припущення щодо напрямку руху граничних точок півплощини на проміжку $0 < r \le r_0$ підтверджується.

5. Розклинювання однорідної площини. Розглянемо простий аналог розглядуваної задачі. Жорсткий клин розклинює пружну площину вздовж напівнескінченної тріщини $-\infty < x < \ell$, $y = \pm 0$, притискаючись своїми гранями до берегів тріщини на проміжку $-\infty < x \le -\ell$ (рис. 2). Клин ширини $2h$ є симетричним відносно осі Ox і його верхня половина така сама, як і на рис. 1, тобто клин задано нерівностями $|y| \le h$, $-\infty < x \le -\ell_1$ і $|y| \le \le h - \dfrac{(x+\ell_1)^2}{2R}$, $-\ell_1 < x \le -\ell_0$, де $\ell_0 = \ell_1 - \sqrt{2Rh}$. При цьому $\ell = \dfrac{r_1}{2}$, $\ell_1 = r_2 - \dfrac{r_1}{2}$. На проміжку $-\ell < x < \ell$ тріщина розкрита. Контакт берегів в околі вершини тріщини відсутній.

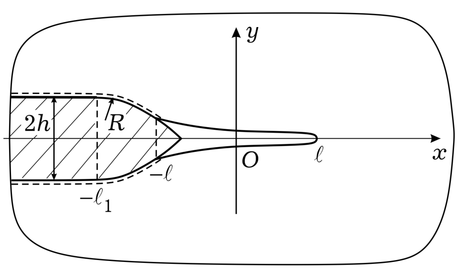

Рис. 2

Відстань ℓ_1 від вершини тріщини до незрізаної частини клина вважаємо відомою, а півдовжину ℓ розкритої частини тріщини потрібно визначити.

Цю задачу зведенням до характеристичного сингулярного інтегрального рівняння розв'язано в [10]. Контактні напруження разом із нормальними напруженнями на продовженні тріщини подано таким одним виразом:

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = -\frac{G}{(1-\nu)\pi R}\left[\left(\sqrt{\ell_1^2-\ell^2} + (x+\ell_1-\ell)\ln\frac{\ell_1-\sqrt{\ell_1^2-\ell^2}}{\ell}\right)\sqrt{\frac{x+\ell}{x-\ell}} - \right.$$

$$\left. -(\ell_1+x)\ln\frac{2\ell|x+\ell_1|}{\left(\sqrt{(\ell_1+\ell)|x+\ell|}+\sqrt{(\ell_1-\ell)|x-\ell|}\right)^2}\right], \quad |x| > \ell. \tag{50}$$

У випадку прямокутного клина ($R = 0$, $\ell_1 = \ell$) маємо

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi} = \frac{Gh}{(1-\nu)\pi}\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2-\ell^2}}, \qquad |x| > \ell. \tag{51}$$

Знайдено також коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_I = \sqrt{2\pi(\ell+\ell_1)}\lim_{x\to\ell+0}\sqrt{x-\ell}\cdot\sigma_y\big|_{y=0} = k_R\, K_I\big|_{R=0},$$

$$k_R = -\frac{\sqrt{2\ell(\ell+\ell_1)}}{Rh}\left(\sqrt{\ell_1^2-\ell^2} + \ell_1\ln\frac{\ell_1-\sqrt{\ell_1^2-\ell^2}}{\ell}\right),$$

$$K_I\big|_{R=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Gh}{1-\nu}, \tag{52}$$

та отримано трансцендентне рівняння

$$\left(\ell - \frac{\ell_1}{2}\right)\sqrt{\ell_1^2-\ell^2} + \ell\left(\ell_1 - \frac{\ell}{2}\right)\ln\frac{\ell_1-\sqrt{\ell_1^2-\ell^2}}{\ell} = -hR \tag{53}$$

для визначення невідомого розміру ℓ.

Відмітимо, що коефіцієнт інтенсивності напружень $K_I\big|_{R=0}$ із (52) для прямокутного клина у $2\pi(1-\nu)^2$ разів (для $\nu = 0.3$ приблизно у 3.08) менший від відповідного коефіцієнта $K_{II}^0 = K_{II}\big|_{R=0,\ \mu_0=0}$ із (47) за відсутності тертя. Отже, інтенсивність розривних напружень при розклинюванні однорідної площини приблизно втричі менша від інтенсивності зсувних напружень при межовому розклинюванні півплощини. Асимптотика контактного тиску на краю прямокутного клина у $\dfrac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}$ разів (для $\nu = 0.3$ приблизно у 1.04), а на нескінченності (як для прямокутного, так і для зрізаного клина) у $\dfrac{4(1-\nu)^2}{3-4\nu}$ разів (для $\nu = 0.3$ приблизно у 1.09) менша, ніж у розглянутій вище задачі згідно з формулою (38).

6. Результати обчислень. Обчислення проведено для коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.3$ і різних значень безрозмірного параметра кривини $\overline{R} = hR/r_2^2$ заокругленого краю клина та коефіцієнта тертя μ_0. Відносний розмір $\overline{r}_0^0 = r_0^0/r_2$ області контакту берегів тріщини біля її вершини у випадку гладкого контакту для прямокутного клина згідно з (33) дорівнює $8.16 \cdot 10^{-7}$. Значення коефіцієнтів ρ_R, ρ_μ впливу заокруглення краю клина та тертя із (34) на цей розмір, які подано у табл. 1, табл. 2, показують, що збільшення заокруглення помітно зменшує відносний розмір $\overline{r}_0 = r_0/r_2$ (це можна пояснити зменшенням відстані r_1 від вершини тріщини до краю півнескінченної області контакту), а наявність тертя є майже пропорційним до коефіцієнта тертя і дещо збільшує розмір $\overline{r}_0$. Надзвичайна мализна розміру r_0 підтверджує можливість асимптотичного спрощення розв'язку, яке було здійснено при розв'язанні задачі. Точність такого наближення є доволі високою – порядку 10^{-6}. У таблицях також подано коефіцієнти k_R, k_μ впливу заокруглення та тертя (із (48)) на коефіцієнт інтенсивності напружень K_{II} відносно його значення K_{II}^0 із (47) у випадку $R = 0$, $\mu_0 = 0$. Коефіцієнт K_{II} збільшується зі зростанням як радіуса заокруглення (через збільшення розкриття тріщини), так і коефіцієнта тертя (через зростання жорсткості системи). Крім того, у табл. 1 для різних значень параметра $\overline{R}$ подано відносну відстань $\overline{r}_1 = r_1/r_2$ від вершини тріщини до області контакту між клином і півлощиною. У дужках наведено відповідні значення для задачі про розклинювання однорідної площини із **п. 5**. Дещо неочікуваним є те, що розбіжність між результатами обчислень у цих двох задачах, постановки яких наведено у **п. 1** і **п. 5**, виявилась зовсім невеликою.

Таблиця 1

$\overline{R}$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ρ_R	0.976	0.928	0.883	0.805	0.731	0.654	0.563
k_R	1.012	1.038	1.064	1.113	1.166	1.229	1.315
	(1.011)	(1.037)	(1.062)	(1.109)	(1.159)	(1.219)	(1.294)
$\overline{r}_1$	0.960	0.881	0.807	0.680	0.560	0.436	0.288
	(0.962)	(0.884)	(0.812)	(0.690)	(0.574)	(0.456)	(0.320)

Таблиця 2

μ_0	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
ρ_μ	1.015	1.031	1.038	1.047	1.063	1.079
k_μ	1.013	1.026	1.033	1.040	1.054	1.069

На рис. 3 зображено розподіли безрозмірних контактних напружень $\overline{\sigma} = \dfrac{r_2}{Gh}\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi}$ між клином і берегом тріщини для різних значень параметра кривини $\overline{R} = 0$, 0.05, 0.2, 0.5 (криві ***1–4***). Суцільні криві відповідають розклинюванню півпощини вздовж межової тріщини, штрихові – розклинюванню однорідної площини. Як і для даних, наведених у табл. 1, значення контактних напружень у цих двох задачах мало відрізняються. На краю прямокутного клина ($\overline{R} = 0$) напруження необмежені. Для заокругленого клина вони стають нульовими на краю $r = r_1$ області контакту та досягають мінімуму всередині заокругленої частини клина. Зі зменшенням параметра $\overline{R}$ значення $\overline{\sigma}$ у точці мінімуму необмежено зменшується, що є характерним для контакту пружного тіла зі штампом із заокругленим краєм [3, 21].

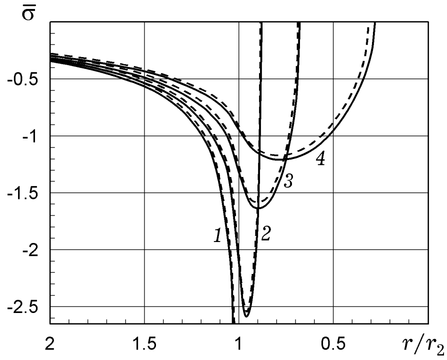

Рис. 3

1. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О расклинивании хрупких тел // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**, № 4. – С. 667–682.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
   То же: *Bateman H.* Higher transcendental functions. – Vol. 1. – New York etc.: McGraw-Hill, 1953. – xxvi+302 p.
3. *Клімчук Т. В., Острик В. І.* Гладкий контакт напівнескінченного штампа із заокругленим краєм і пружної смуги // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 2. – С. 132–141.
   Те саме: *Klimchuk T. V., Ostryk V. I.* Smooth contact of a semiinfinite punch with rounded edge and an elastic strip // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 5. – P. 650–664. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-3842-9.
4. *Маркузон И. А.* О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 2. – С. 356–361.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
   Те саме: *Noble B.* Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations. – New York: Chelsea, 1988. – 246 p.
6. *Острик В. И., Улитко А. Ф.* Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
7. *Острик В. І.* Асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі краю області контакту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 4. – С. 58–71.
   Те саме: *Ostryk V. I.* Asymptotic distributions of stresses and displacements near the edge of a contact zone // J. Math. Sci. – 2019. – **238**, No. 1. – P. 63–82. – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04218-9.
8. *Острик В. І.* Контакт берегів міжфазної напівнескінченної тріщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 1. – С. 106–121.
9. *Острик В. І.* Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 2. – С. 58–65.
   Те саме: *Ostryk V. I.* Friction contact of the edges of an interface crack under the conditions of tension and shear // Mater. Sci. – 2003. – **39**, No. 2. – P. 214–224. – https://doi.org/10.1023/B:MASC.0000010271.69655.67.
10. *Острик В. І.* Контактна механіка: Підруч. – Київ: ВПЦ «Київ. ун-т», 2015. – 560 с.
11. *Острик В. І.* Метод факторизації та його узагальнення у змішаних задачах теорії пружності. – Київ: ВПЦ «Київ. ун-т», 2018. – 480 с.
12. *Острик В. І., Щокотова О. М.* Ковзний контакт штампа з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 4. – С. 82–91.
    Те саме: *Ostryk V. I., Shchokotova O. M.* Sliding contact of a punch with elastic wedge // Mater. Sci. – 2012. – **47**, No. 4. – P. 514–526. – https://doi.org/10.1007/s11003-012-9423-z.
13. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.

– Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка – Т. 2.
14. *Симонов И. В.* Контактные задачи расклинивания упругих тел // Механика контактных взаимодействий / Под ред. В. М. Александрова и И. И. Воровича. – Москва: Физматлит, 2001. – С. 654–667.
15. *Симонов И. В.* О расклинивании кусочно-однородной упругой среды // Прикл. математика и механика. – 1985. – **49**, № 2. – С. 275–283.
16. *Симонов И. В.* Трещина на границе раздела двух упругих сред при расклинивании // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 3. – С. 105–112.
17. *Улитко А. Ф.* Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов // Соврем. проблемы механики сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Книга, 1995. – С. 185–193.
18. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
19. *Черепанов Г. П.* Решение одной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, № 5. – С. 907–912.
20. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**, No. 4. – P. 780–781. – https://doi.org/10.1115/1.3424179.
21. *Klimchuk T. V., Ostrik V. I.* Frictional contact between an elastic strip and a semi-infinite punch with rounded edge // Acta Mechanica. – 2017. – **228**, No. 10. – P. 3619–3631.
22. *Maiti M.* On the equilibrium of a Griffith crack opened by a rigid inclusion // SIAM J. Appl. Math. – 1980. – **38**, No. 2. – P. 209–214.
23. *Maiti M.* On the extension of a crack due to rigid inclusions // Int. J. Fract. – 1979. – **15**, No. 4. – P. 389–393.
24. *McCartney L. N.* General solution of a certain mixed boundary value crack problem // Int. J. Eng. Sci. – 1983. – **21**, No. 2. – P. 131–142.
25. *Tweed J.* The stress intensity factor of a Griffith crack which is opened by a thin symmetric wedge // J. Elasticity. – 1971. – **1**, No. 1. – P. 29–35.

WEDGING OUT OF AN ELASTIC HALF-PLANE ALONG THE BOUNDARY SEMI-INFINITE CRACK

The equilibrium of an elastic half-plane with a semi-infinite crack on its boundary is considered. The edge of the crack at a certain distance from its tip is in contact with a rigid semi-infinite wedge, and near it – with a rigid base. Frictional forces are taken into account in the domain of contact between the crack edge and the rigid base. Using the Wiener – Hopf method, an analytical solution of the problem is obtained. The boundaries of the contact domains, stress distributions in these domains and on the border of the half-plane outside the crack as well as the mode II stress intensity factors are found.

Key words: *wedging out, boundary crack, Comninou's model, Mellin integral, Winner – Hopf method, mode II stress intensity factor.*

Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано
14.02.22