

ГАЛУЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ВИНИКАЮТЬ У ЗАДАЧАХ СИНТЕЗУ ПЛОСКИХ АНТЕННИХ РЕШІТОК

У процесі розв'язання задач синтезу антен за заданими амплітудними характеристиками часто виникає необхідність застосування нелінійної спектральної теорії. Практична постановка задач синтезу полягає у виставленні амплітуд шуканих функцій. Стандартним способом оптимізації є виведення рівняння Ейлера для функціонала, який використовується як критерій оптимізації. Як правило, таке рівняння є інтегральним і нелінійним з огляду на специфіку постановки задачі. Характерною для такого рівняння є неєдність розв'язків і їхнє розгалуження або біфуркація. Знаходження розгалужених розв'язків вимагає дослідження відповідних однорідних рівнянь і відповідної задачі на власні значення. Дослідження задачі дозволяє визначити множину точок взірних параметрів, у яких відповідні власні значення рівні одиниці, що визначає точки галуження розв'язків. Дані розрахунків свідчать про здатність запропонованого підходу чисельно визначати розв'язки нелінійних рівнянь, їхні властивості та точки галуження розв'язків з невеликими обчислювальними витратами.

Ключові слова: нелінійні інтегральні рівняння, варіаційний підхід, діаграма напрямленості, нелінійна задача на власні значення, біфуркація розв'язків, числове моделювання.

Вступ. Проблеми з невизначеною фазою хвильового поля випромінюючих систем виникають у різних застосуваннях і широко описані в літературі. Найвідомішою з них є так звана фазова проблема в оптиці (див., наприклад, [17, 23, 33, 34]). Вона полягає у відновленні фазового розподілу (аргументу) Фур'є-перетворення скінченної функції за її амплітудою (модулем), заданою (виміряною) уздовж всієї дійсної осі. Ця задача відноситься до класичних задач відновлення (ідентифікації) і вимагає умов існування єдиного розв'язку. У цій статті розглядається ще один клас обернених задач, які можна назвати задачами оптимізації (синтезу). У сенсі перетворення Фур'є це може бути, наприклад, задача знаходження такої скінченної комплексної функції, модуль перетворення Фур'є якої задовольняє певну вимогу (наприклад, близькість до заданої додатної функції). Як правило, такі вимоги формулюються у варіаційній формі як мінімізація тих чи інших функціоналів. Очевидно, що таке формулювання не вимагає єдиного розв'язку. Навпаки, існування багатьох розв'язків часто є бажаним, оскільки дає більше ступенів вільності для визначення того чи іншого розв'язку.

Застосування задач фазової оптимізації є характерними в теорії ліній електродинаміки, перетворювачів поля, антен, резонаторів тощо. Перші роботи, присвячені нелінійним оберненим задачам такого типу, появились в другій половині минулого століття (див., наприклад, [8–10, 20, 24, 29]). У математичному аспекті задачі такого типу зводяться до нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна [18, 26, 28]. Вони містять лінійне ядро та нелінійний множник, який залежить від невідомої комплексної функції, під інтегралом. Як правило, аргумент (фаза) цієї функції появляється окремо від модуля. Подібні рівняння зустрічаються в літературі в контексті згаданої фазової проблеми [16, 21]. Вони мають різні розв'язки, і вивчення їхньої структури та процесу галуження або біфуркації є цікавою математичною задачею [2, 4]. З огляду на нелінійність розглядуваних задач, для їх розв'язання необхідно розробляти спеціальні аналітичні або числові методи. Поряд з ітераційними методами, які моделюють фізичні процеси формування поля, найдодільнішими в цьому напрямі можуть бути різні модифікації

✉andr@iapmm.lviv.ua

методу Ньютона (див., наприклад, [3, 15, 19]).

На сьогодні розроблено низку аналітично-числових методів розв'язання нелінійних задач в акустиці, електродинаміці, гідродинаміці та інших галузях прикладних наук [13, 27, 30]. Розроблені на сьогодні методи орієнтовані переважно на розв'язання одновимірних задач. Однак при застосуванні їх до багатовимірних задач виникають труднощі аналітичного та обчислювального характеру. Для розв'язання дво- та тривимірних нелінійних задач на власні значення в останні два десятиліття активно розвивається метод неявних функцій [6, 25, 32] як один з ефективних інструментів, що набув широкого застосування. Розширення цього методу, яке приводить до розв'язання задачі Коші, застосовується у пропонуваній роботі для визначення розв'язків нелінійної двопараметричної задачі на власні значення, яка виникає в задачах синтезу плоских решіток за заданою енергетичною діаграмою напрямленості (ДН).

Методи нелінійної спектральної теорії використовуються в цій статті для дослідження властивостей розв'язків задач синтезу випромінюючих систем за заданими неповними вхідними даними. Відсутність повноти вхідної інформації розглядається тут на прикладі невизначеної фазової характеристики функції, яка визначає ДН антенних решіток.

1. Оператори прямої електродинамічної задачі. Розглянемо випромінюючу систему у вигляді плоскої решітки з прямокутним або гексагональним розміщенням елементів. Плоска прямокутна решітка (рис. 1а) складається з $N_2 \times M_2 = (2N + 1) \times (2M + 1)$ однакових елементів (випромінювачів струмів), які розташовані в площині xOy декартової системи координат з рівномірним кроком. З огляду на ідентичність випромінювачів, задачу синтезу можна сформулювати не для всієї тривимірної векторної ДН, а лише для деякої допоміжної скалярної функції $f(x_1, x_2)$, яку називають множителем решітки. Для прямокутної еквідистантної решітки ця функція має такий вигляд [1]:

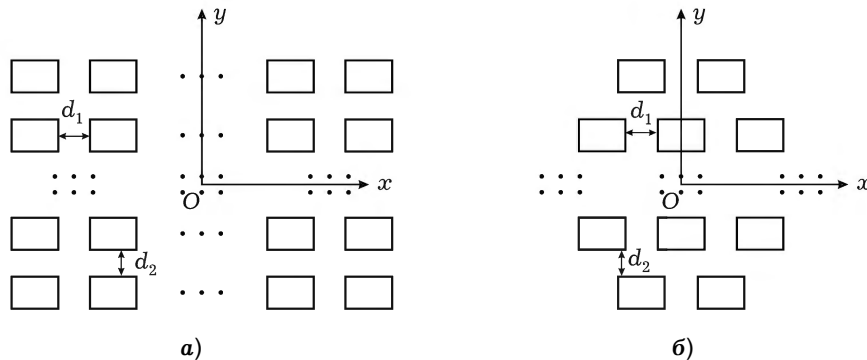


Рис. 1. Геометрія (а) прямокутної та (б) гексагональної антенних решіток.

$$f(x_1, x_2) = A\mathbf{I} \equiv \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M I_{nm} e^{i(c_1 n x_1 + c_2 m x_2)}, \quad (1)$$

де $\mathbf{I} = \{I_{nm}, -N \leq n \leq N, -M \leq m \leq M\}$ – набір збуджень (струмів) в елементах решітки, $x_1 = \sin \theta \cos \varphi / \sin \alpha_1$, $x_2 = \sin \theta \sin \varphi / \sin \alpha_2$ – узагальнені кутові координати, $c_1 = k d_1 \sin \alpha_1$, $c_2 = k d_2 \sin \alpha_2$, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, d_1 і d_2 – відстані між випромінювачами по осі Ox та осі Oy відповідно, α_1 і α_2 – кутові координати, в межах яких задана енергетична ДН $P(x_1, x_2)$ є відмінною від нуля (поза цими кутами $P(x_1, x_2) \equiv 0$). Функція

$f(x_1, x_2)$ є $2\pi/c_1$ -періодичною відносно x_1 і $2\pi/c_2$ -періодичною відносно x_2 . Область зміни координат x_1 і x_2 на одному періоді позначимо через $\Omega = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq \pi/c_1, |x_2| \leq \pi/c_2\}$. Надалі функцію $f(x_1, x_2)$ називатимемо ДН решітки.

Аналогічну формулу можна записати для решітки з гексагональним розміщенням елементів (див. рис. 1б):

$$f(x_1, x_2) = A\mathbf{I} \equiv \sum_{m=-M_2}^{M_2} \sum_{n=-N_1(m)}^{N_1(m)} I_{nm} e^{i(c_1 n x_1 + c_2 m x_2)}, \quad (2)$$

де $M = 2M_2 + 1$ – кількість лінійних підрешіток, а $N = 2N_1(m) + 1$ – кількість елементів у m -й підрешітці.

У рівняннях (1) і (2) для ДН оператор A – лінійний оператор, який відображає комплекснозначний простір джерел збудження $H_I = C^{N_2 \times M_2}$ (прямокутний випадок) та $H_I = C^{N_0 \times M}$ (гексагональний випадок) у простір комплекснозначних функцій двох змінних H_f , реалізованих ДН, визначених в області Ω . Значення N_0 визначає кількість елементів у центральній лінійній підрешітці в гексагональному випадку.

Припустимо, що задана енергетична ДН $P(s_1, s_2)$ відмінна від тотожного нуля у деякій області $\bar{G} \subseteq \Omega$, а зовні цієї області вона є нульовою. Задача синтезу (оптимізаційна задача) зводиться до мінімізації функціонала

$$\sigma_\alpha(\mathbf{I}) = \|P - |AI|^2\|_f^2 + \alpha \|\mathbf{I}\|_I^2, \quad (3)$$

де α – ваговий параметр; $\|\cdot\|_f$ і $\|\cdot\|_I$ – норми в просторі ДН H_f і просторі струмів H_I відповідно, породжені скалярними добутками

$$\|f\|_f^2 = (f_1, f_2)_f = \iint_{\Omega} f_1(x_1, x_2) \bar{f}_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (4)$$

$$\|\mathbf{I}\|_I^2 = (\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)_I = \frac{4\pi^2}{c_1 c_2} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M I_{1nm} \bar{I}_{2nm}. \quad (5)$$

Тут значення $\bar{f}_2(x_1, x_2)$ і \bar{I}_{2nm} – спряжені до $f_2(x_1, x_2)$ і I_{2nm} відповідно.

Нелінійне інтегральне рівняння для комплексного вектора \mathbf{I} струмів у просторі H_I , отримане з використанням необхідної умови мінімуму функціонала (3), має вигляд [7]

$$\alpha \mathbf{I} + 2A^*(|AI|^2 A\mathbf{I}) - 2A^*(PA\mathbf{I}) = 0. \quad (6)$$

Тут A^* – оператор, спряжений до A , означений рівністю

$$(A\mathbf{I}, f)_f = (\mathbf{I}, A^* f)_I.$$

Використовуючи скалярні добутки (4), (5) і рівняння (1), для прямокутної решітки отримуємо

$$(A^* f)_{nm} = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint_{\Omega} f(x_1, x_2) e^{-i(c_1 n x_1 + c_2 m x_2)} dx_1 dx_2, \\ n = -N, -N + 1, \dots, N - 1, N, \\ m = -M, -M + 1, \dots, M - 1, M. \quad (7)$$

Подіавши на обидві сторони рівняння (6) оператором A , отримаємо не-

лінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна для функції f :

$$\alpha f + 2AA^*(|f|^2 f) - 2AA^*(Pf) = 0. \quad (8)$$

Для прямокутної решітки ядро оператора AA^* визначається як

$$K(c_1, c_2, x_1, x'_1, x_2, x'_2) = K_1(c_1, x_1, x'_1)K_2(c_2, x_2, x'_2), \quad (9)$$

де

$$K_1(x_1, x'_1, c_1) = \frac{c_1}{\pi} \frac{\sin(N_2 c_1 (x_1 - x'_1)/2)}{\sin(c_1 (x_1 - x'_1)/2)}, \quad (10)$$

$$K_2(x_2, x'_2, c_2) = \frac{c_2}{\pi} \frac{\sin(M_2 c_2 (x_2 - x'_2)/2)}{\sin(c_2 (x_2 - x'_2)/2)}. \quad (11)$$

У випадку гексагональної решітки ядро оператора AA^* не можемо подати у вигляді двох співмножників, тому вираз для нього є більш складним:

$$\begin{aligned} K(c_1, c_2, x_1, x'_1, x_2, x'_2) &= \frac{\sin[c_1(N_1(0) - 1/2)(x_1 - x'_1)]}{\sin(1/2c_1(x_1 - x'_1))} + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{M_2} \cos mc_2(x_2 - x'_2) \times \\ &\times \begin{cases} \frac{\sin[c_1(N_1(m) - 1/2)(x_1 - x'_1)]}{\sin[1/2c_1(x_1 - x'_1)]}, & N_1(m) \text{ непарне,} \\ 2 \sum_{n=1}^{N_1(m)} \cos[c_1(n - 1/2)(x_1 - x'_1)], & N_1(m) \text{ парне.} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

де $N_1(0)$ і $N_1(m)$ – кількість випромінювачів у центральній та m -й підрешітках. Відповідно, формула для спряженого оператора (7) також ускладнюється.

Ядра (9)–(12) інтегрального рівняння (8) дійсні та вироджені. Оскільки рівняння (6) і (8) є нелінійними, то вони можуть мати неєдині розв'язки. Кількість розв'язків та їхні властивості досліджуються за методикою, запропонованою в [4, 5]. У практичних застосуваннях розв'язання рівнянь (6), (8) здійснюється методом послідовних наближень. Збіжність методу залежить від параметра α , заданої енергетичної ДН $P(x_1, x_2)$, а також від параметрів c_1 і c_2 , які містяться в аргументах ядер (9)–(12).

2. Знаходження ліній біфуркації. У випадку постановки задачі синтезу за заданою енергетичною ДН поведінка розв'язків нелінійного інтегрального рівняння (8) відрізняється від поведінки розв'язків нелінійного інтегрального рівняння, яке отримується в задачах синтезу за заданою амплітудною ДН [1, 11, 14]. Для рівняння (8) є характерним те, що при всіх вхідних параметрах задачі існує тривіальний розв'язок $f \equiv 0$, і від нульового розв'язку можуть відгалужуватись ненульові розв'язки з різними властивостями. Тому, на відміну від задачі синтезу за заданою амплітудною ДН, де йде мова про галуження розв'язків, тут вживаємо термін біфуркація [7]. Для визначення кривих біфуркації використовуємо лінійне інтегральне рівняння з [4]. На основі цього рівняння переходимо до відповідних задач на власні значення, розв'язки яких дозволяють знайти характерні значення параметрів у ядрі рівняння, при яких виникає біфуркація.

2.1. Опис методу. Для дослідження властивостей розв'язків рівняння (8) використаємо допоміжне лінійне рівняння

$$\alpha f = 2AA^*(Pf). \quad (13)$$

Задача знаходження біфуркаційних кривих зводиться до відповідної

задачі на власні значення. Рівняння для визначення власних функцій і відповідних власних значень, яке отримуємо з (13), має вигляд

$$g(x_1, x_2) = 2\lambda \frac{1}{\alpha} \iint_{\Omega} g(x'_1, x'_2) K_1(c_1, x_1, x'_1) K_2(c_2, x_2, x'_2) dx'_1 dx'_2. \quad (14)$$

Згідно з теорією галужень розв'язків нелінійних рівнянь [4], точками біфуркації можуть бути ті значення параметрів c_1 і c_2 , при яких рівняння (14) має ненульові розв'язки. Використовуючи властивості виродженості ядер (10) і (11), зведемо рівняння (14) до еквівалентної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Коефіцієнти матриці цієї системи залежать від параметрів c_1 і c_2 аналітично. Рівняння для власних функцій, що відповідають (13), записуються у вигляді

$$g(x_1, x_2) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M x_{nm} e^{i(c_1 n x_1 + c_2 m x_2)}, \quad (15)$$

де

$$x_{nm} = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint_{\Omega} P(x'_1, x'_2) g(x'_1, x'_2) e^{-i(c_1 n x'_1 + c_2 m x'_2)} dx'_1 dx'_2.$$

Помноживши обидві частини (15) на $P(x'_1, x'_2) e^{-i(c_1 n x'_1 + c_2 m x'_2)}$ при $k = -N, -N+1, \dots, N-1, N$ і $\ell = -M, -M+1, \dots, M-1, M$ та проінтегрувавши по області Ω , отримуємо СЛАР для визначення величин $x_{k\ell}$:

$$\begin{aligned} x_{k\ell} &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M a_{nm}^{(k\ell)}(c_1, c_2) x_{nm}, \\ k &= -N, -N+1, \dots, N-1, N, \\ \ell &= -M, -M+1, \dots, M-1, M, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$a_{nm}^{(k\ell)} = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint_{\Omega} P(x'_1, x'_2) e^{-i[c_1(n-k)x'_1 + c_2(m-\ell)x'_2]} dx'_1 dx'_2,$$

а матриця коефіцієнтів $a_{nm}^{(k\ell)}(c_1, c_2)$ є самоспряженою та ермітовою.

Таким чином, отримали двопараметричну нелінійну спектральну задачу, що відповідає однорідній СЛАР (16). Цю задачу подамо як

$$(E_M - A_M(c_1, c_2))\mathbf{x} = 0, \quad (17)$$

де $A_M(c_1, c_2)$ – матриця коефіцієнтів, E_M – одинична матриця розмірності $N_2 \times M_2$. Щоб система (17) мала ненульовий розв'язок, повинна виконуватись рівність

$$\Psi(c_1, c_2) = \det[E_M - A_M(c_1, c_2)] = 0. \quad (18)$$

Можна легко переконатися, що функція $\Psi(c_1, c_2)$ є дійсною. Крім того, оскільки $A_M(c_1, c_2)$ є ермітовою матрицею, то матриця $E_M - A_M(c_1, c_2)$ також є ермітовою. Визначник ермітової матриці є дійсним числом [22]. Таким чином, $\Psi(c_1, c_2)$ є дійсною функцією дійсних аргументів c_1 і c_2 .

Отже, проблема знаходження власних значень рівняння (14) або визначення розв'язку еквівалентної СЛАР (17) зводиться до знаходження нулів функції $\Psi(c_1, c_2)$. Якщо розглядати рівняння $\Psi(c_1, c_2) = 0$ як задачу для визначення неявної функції, наприклад, $c_2 = c_2(c_1)$ в околі деякої точки c_1 , то приходимо до задачі Коші [31]

$$\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{\Psi'_{c_1}(c_1, c_2)}{\Psi'_{c_2}(c_1, c_2)}, \quad (19)$$

$$c_2(c_1^{(0)}) = c_2^{(0)}. \quad (20)$$

Для отримання початкових умов (20) переходимо до допоміжної одновимірної нелінійної спектральної задачі, замінивши c_2 в рівнянні (20) на $c_2 = \gamma c_1$ з деяким дійсним параметром γ . В результаті отримуємо одновимірну задачу на власні значення

$$(E_M - A_M(c_1, \gamma c_1))\tilde{\mathbf{x}} \equiv (E_M - \tilde{A}_M(c_1))\tilde{\mathbf{x}} = 0. \quad (21)$$

Рівняння (18), яке відповідає рівнянню (21), має вигляд

$$\Psi(c_1, \gamma c_1) = \det[E_M - \tilde{A}_M(c_1)] = 0. \quad (22)$$

Нехай $c_1^{(0)}$ – розв'язок рівняння (22), тоді $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) = (c_1^{(0)}, \gamma c_1^{(0)})$ – точка, яка відповідає власному значенню $\lambda_0 \approx 1$ рівняння (15). Розв'язуючи рівняння (19), (20) в малому околі точки $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$, знаходимо спектральну криву матриці-функції $A_M(c_1, c_2)$, яка є кривою, що визначає множини точок біфуркації.

Власні функції рівняння (14) визначаємо як власні вектори матриці $A_M(c_1, c_2)$ з використанням результуючого розв'язку задачі Коші з шуканими розв'язками $\Psi(c_1, c_2)$. У цій процедурі чотиривимірна матриця $A_M(c_1, c_2)$ зводиться до двовимірної шляхом відповідної нумерації її елементів.

2.2. Визначення області ненульових розв'язків. Зважаючи на особливості постановки задачі за заданою енергетичною ДН $P(x_1, x_2)$, рівняння (8) має нульовий розв'язок при довільних значеннях параметрів c_1, c_2, α . Із практичної точки зору це є суттєвим недоліком, але для деяких заданих ДН можна визначити область зміни цих параметрів, у якій існує відмінний від нуля розв'язок.

При малих c_1 і c_2 ядро (9) можна записати наближено у вигляді

$$K(c_1, c_2, x_1, x_1', x_2, x_2') \approx \frac{M_2 N_2 c_1 c_2}{\pi^2}.$$

Припускаючи, що $f(x_1, x_2)$ є постійною функцією (зазвичай $f(x, x) \approx \text{const}$ для малих c_1 і c_2), інтегральне рівняння (8) перепишемо так:

$$\frac{\pi^2 \alpha}{2M_2 N_2 c_1 c_2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - 4|f(x_1, x_2)|^2.$$

Область інтегрування рівняння (8) у цій формулі зводиться до області $[-1, 1] \times [-1, 1]$ з огляду на області визначення аргументів x_1 і x_2 та малість параметрів c_1 і c_2 .

Враховуючи додатність $|f(x_1, x_2)|^2$, отримаємо такий зв'язок між функцією $P(x_1, x_2)$ та параметрами c_1, c_2 і α :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \frac{\pi^2 \alpha}{2M_2 N_2 c_1 c_2} > 0.$$

Остаточно, розглянувши випадок $P(x_1, x_2) \equiv 1$, отримаємо

$$c_1 c_2 > \frac{\pi^2 \alpha}{8M_2 N_2}. \quad (23)$$

Фактично нерівність (23) визначає область зміни параметрів c_1 , c_2 і α , де існують ненульові розв'язки. На рис. 2 зображено криві залежності $c_2 = c_2(c_1)$ для трьох різних значень M_2 і N_2 . Результати наведено для решітки з кількістю елементів $M_2 = N_2 = 3$ (крива 1), $M_2 = N_2 = 5$ (крива 2) і $M_2 = N_2 = 11$ (крива 3).

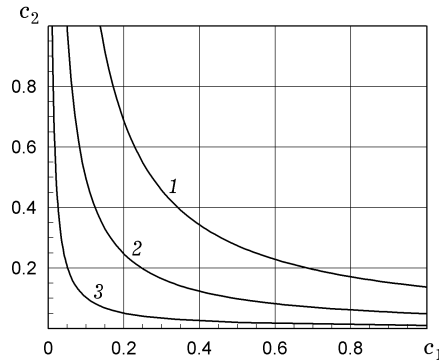


Рис. 2. Криві $c_2 = c_2(c_1)$ для різних значень M_2 і N_2 .

Область значень c_1 і c_2 , де можливе існування нульових розв'язків, згідно з оцінкою (23), розташована нижче та ліворуч від наведених кривих. Як бачимо, область нульових значень істотно зменшується зі збільшенням M_2 і N_2 . Отримані результати свідчать про те, що нульові розв'язки рівняння (8) при заданій постійній енергетичній ДН можуть існувати або при невеликих значеннях добутку $c_1 c_2$, що відповідає низьким частотам (при заданих розмірах решітки), або при значеннях c_1 , що значно перевищують c_2 , і навпаки. Цей останній випадок відповідає решіткам з великою різницею відстаней між елементами по осях координат. Звичайно на практиці такі решітки використовуються рідко.

2.3. Знаходження кривих біфуркації.

2.3.1. Прямокутна решітка. Знаходження біфуркаційних кривих нелінійного рівняння (8) проведено для решітки, що містить $N_2 \times N_2 = 11 \times 11 = 121$ елемент для заданої енергетичної ДН $P(x_1, x_2) \equiv 1$ при $\Lambda_c = \{(c_1, c_2), 0 < c_1, c_2 \leq 2\}$ для різних значень параметра α в (3). Пошук біфуркаційних кривих можна здійснювати безпосередньо шляхом дослідження властивостей визначника (18) як функції параметрів c_1 і c_2 . Крім того, функція $\Psi(c_1, c_1)$ (18) залежить від параметра α , тому набір власних значень визначника (18) також залежить від цього параметра, тобто параметр α визначає набір спектральних кривих, які розділяють області нульових і ненульових розв'язків.

Поведінку відповідних кривих при зміні параметра α наведено на рис. 3. Залежність функції $\Psi(c_1, c_1)$ (18) від параметрів c_1 і c_2 при $\alpha = 0.5$ наведено на рис. 3а, а на рис. 3б – рис. 3г показано перетин цієї функції з площиною $\Psi(c_1, \gamma c_1) = 0$ при різних α . Ці перетини визначають набір кривих, які відповідають спектральним лініям, що розділяють області нульових

і ненульових розв'язків. При фіксованому розмірі решітки область, де можуть існувати нульові розв'язки, розширюється зі збільшенням параметра α . Ця область розташована зліва і нижче від першої кривої.

Криві, позначені номером **1**, відповідають розв'язкам із постійною (нульовою або парною) фазовою ДН; криві з номером **2** відповідають розв'язкам із парною відносно осі Ox_1 та непарною відносно осі Ox_2 фазовою ДН, а криві з номером **3** відповідають розв'язкам із непарними фазовими ДН відносно двох осей координат. Запропонована процедура є досить наближеною, вона не дозволяє розділити криві, що відповідають різним типам розв'язків, і у такий спосіб виявити області, де існує ненульовий розв'язок для синтезованої енергетичної ДН із заданою фазовою властивістю.

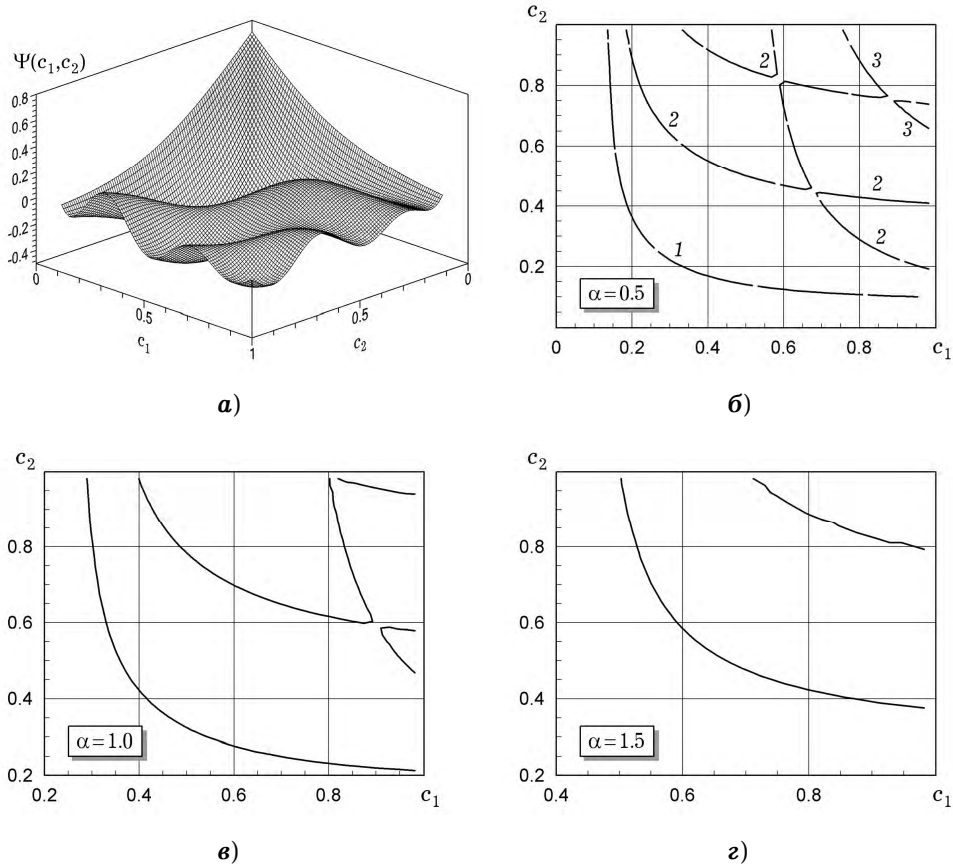


Рис. 3. Спектральні криві рівняння (19) при різних α .

Метод неявної функції, запропонований у [6] і розроблений для плоскої решітки в [12], позбавлений цього недоліку. На першому кроці цього методу розв'язується серія одновимірних задач на власні значення, при цьому різні значення параметра γ задаються співвідношенням $c_2 = \gamma c_1$ і розв'язується одновимірна задача відносно c_1 . На рис. 4 і рис. 5 показано перші чотири власні значення задачі при $\gamma = 1.0$ і $\gamma = 0.2$. Значення $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)} = \gamma c_1^{(i)})$, $i = 1, 2, 3, 4$, при яких $\lambda_i = 1$, є точками біфуркації на площині $c_1 O c_2$. Отже, набір точок (c_1, c_2) , у яких власне значення $\lambda_i = 1$, визначається наближено з графічних даних.

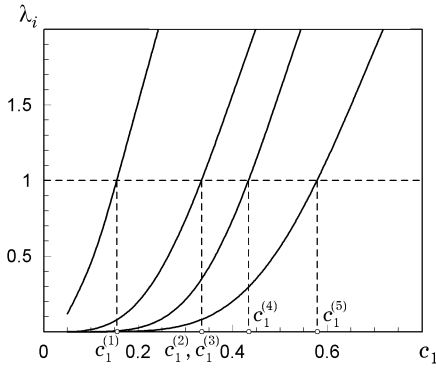


Рис. 4. Перші власні значення на променях $c_1 = c_2$, $\alpha = 0.5$.

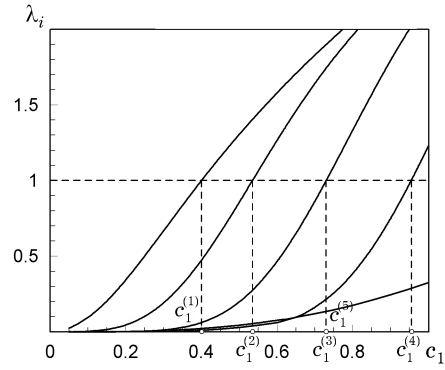


Рис. 5. Перші власні значення на променях $c_2 = 0.2c_1$, $\alpha = 0.5$.

Наступним кроком є уточнення значень $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$ шляхом розв'язання трансцендентного рівняння (18), а точка $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$ розглядається як початкове наближення для цього кроку.

На останньому кроці біфуркаційна крива в площині (c_1, c_2) визначається шляхом розв'язання задачі Коші (19), (20) після уточнення значень $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$. На рис. 6 показано біфуркаційні криві $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}) \div (c_1^{(4)}, c_2^{(4)})$, які відповідають першим чотирьом власним значенням. Крива з номером **1** відповідає розв'язку з нульовою (парною) фазою синтезованої ДН. Ця крива відповідає кривій, позначеній цифрою **1** на рис. 3б. Нульових розв'язків із такою властивістю фази для значень c_1 і c_2 вище і праворуч від цієї кривої немає.

Криві **2** і **2'** відповідають розв'язкам, у яких фазова ДН є симетричною відносно однієї осі і асиметричною відносно іншої осі (очевидно, що для плоскої решітки таких кривих є дві і вони антисиметричні). Крива **2** відповідає кривій **2** на рис. 3б. Крива з номером **3** відповідає розв'язку з антисиметричними (непарними) відносно обох осей фазовими ДН. Розташування областей нульового та ненульового розв'язків таке саме, як на рис. 3б.

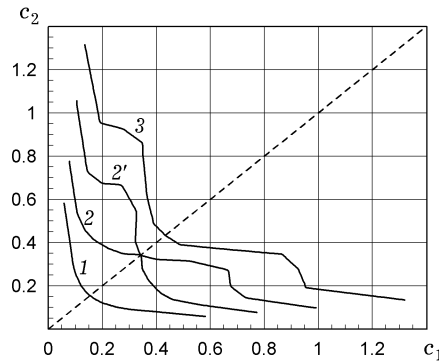


Рис. 6. Криві біфуркації, які відповідають точкам $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$, $i = 1, \dots, 4$, $N_2 = M_2 = 11$.

Треба зазначити, що задача уточнення коренів рівняння (20) є найбільш трудомісткою за обчисленнями, оскільки для уточнення коренів цього рівняння необхідна серія обчислювальних експериментів з різними значеннями початкових параметрів, близькими до наближених.

2.3.2. Гексагональна решітка. Спочатку розглянемо процедуру визначення біфуркаційних кривих шляхом знаходження нульових ліній визначника (18). Результати, подібні до тих, що наведені на рис. 3а та рис. 3б для прямокутної решітки, показано на рис. 7 та рис. 8. Бачимо, що поведін-

ка функції $\Psi(c_1, c_2)$ є більш складною, ніж у випадку прямокутної решітки. Отримані дані свідчать про те, що додатково появляються розв'язки з іншими властивостями фазової ДН $\arg(f(x_1, x_2))$. Один із таких розв'язків позначено цифрою 4. Інші розв'язки появляються при збільшенні значень параметрів c_1 і c_2 та фіксованому α .

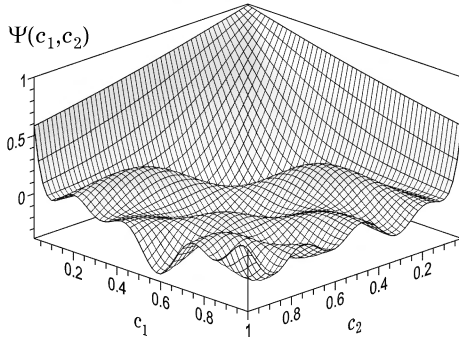


Рис. 7. Поверхня значень детермінанта (22) для гексагональної решітки, $\alpha = 0.5$.

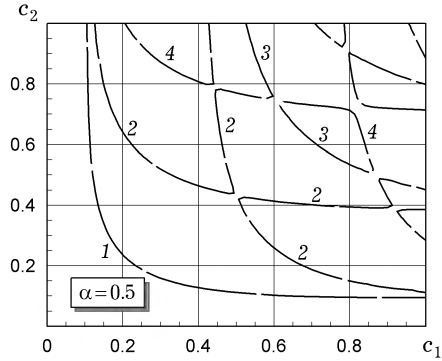


Рис. 8. Нульові лінії детермінанта (22) для гексагональної решітки, $\alpha = 0.5$.

Пошук біфуркаційних кривих здійснюється, як і для випадку прямокутної решітки. Числові результати подано для решітки з $N_{\text{tot}} = 61$ елементів для заданої енергетичної ДН $P(x_1, x_2) = 1$ при $\Lambda_c = \{(c_1, c_2), 0 < c_1, c_2 \leq 2.0\}$ з різними значеннями α у функціоналі (3). На першому кроці розв'язували одновимірні задачі на власні значення при різних значеннях параметра γ . На рис. 9 показано перші чотири власні значення при $\gamma = 1.0$, а на рис. 10 – при $\gamma = 0.2$. Подібно до випадку прямокутної решітки, точки, в яких $\lambda_i = 1$, переміщуються вправо і відстань між ними збільшується при $\gamma = 0.2$. Значення $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)} = \gamma c_1^{(i)})$, $i = 1, 2, 3, 4$, при яких $\lambda_i = 1$, відповідають точкам біфуркації на площині $c_1 O c_2$. Точки $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$, для яких власні значення $\lambda_i = 1$, на цьому кроці визначаються наближено.

Уточнення значень $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$ шляхом розв'язання рівняння (18) виконується на наступному кроці, а дані рис. 9 і рис. 10 використовуються як початкові наближення. Для розв'язання використовується стандартний числовий метод поділу відрізка наполовину.

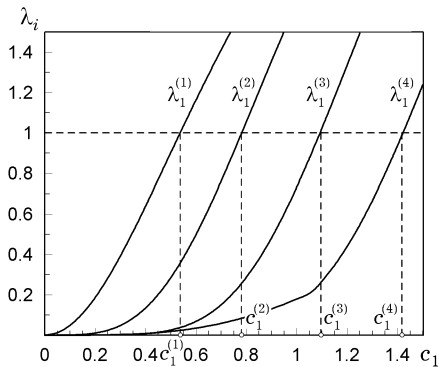


Рис. 9. Перші власні значення на промені $c_1 = c_2$ при $\alpha = 0.5$.

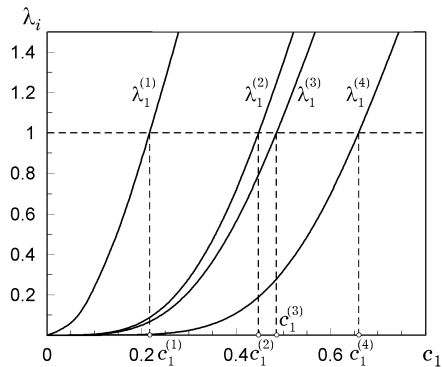


Рис. 10. Перші власні значення на промені $c_2 = 0.2c_1$ при $\alpha = 0.5$.

Точки біфуркації $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$, $i = 1, \dots, 4$, для перших чотирьох власних значень на променях $c_2 = \gamma c_1$ показано на рис. 11. Відповідні біфуркаційні криві, отримані шляхом розв'язання задачі Коші (19), (20), наведено на рис. 12. Як і у випадку прямокутної решітки, для отримання уточнених даних необхідно провести додаткові обчислення.

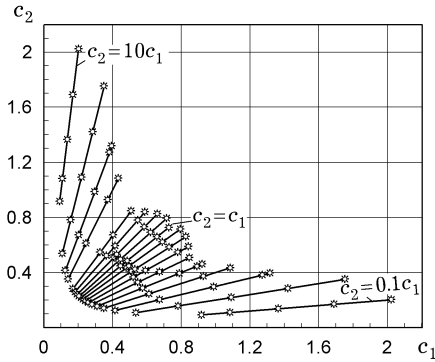


Рис. 11. Точки біфуркації на променях $c_2 = \gamma c_1$.

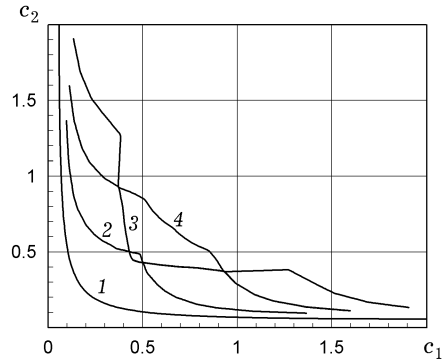


Рис. 12. Біфуркаційні криві на площині (c_1, c_2) .

3. Результати числового моделювання.

Результати, наведені в цьому розділі, демонструють, як інформація про точки біфуркації, отримані як розв'язки нелінійних задач на власні значення, допомагає знайти розв'язки, які є оптимальними з точки зору критерію оптимізації, що використовується. Результати наведено для прямокутної решітки.

Властивості розв'язків рівняння (8), отримані за допомогою методу послідовних наближень, безпосередньо пов'язані з властивостями фазової характеристики власних функцій, які визначаються при розв'язуванні задачі на власні значення. Задавши початкове наближення f_0 для ітераційного процесу розв'язання рівняння (8) із заданою властивістю фази, можна отримати його розв'язок з однаковою фазовою властивістю $\arg(f)$ в широкому діапазоні характерних параметрів c_1 і c_2 . Це важливо для інженерного проектування решіток, які мають фіксовані фазові характеристики випромінювання у визначеному діапазоні частот.

Метод послідовних наближень

$$f_{n+1} - \beta f_n + (1 - \beta)V(f_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

використовується для розв'язання рівняння (8) з набором конкретних фізичних параметрів решітки. Оператор V у формулі (24) є таким:

$$V(f) = \frac{2}{\alpha} [AA^*((P \cdot f) - (|f|^2 \cdot f))].$$

Додатковий параметр $\beta \in [0, 1]$ у (24) використовується для прискорення збіжності ітераційного процесу. Для обґрунтування умови збіжності ітераційного процесу (24) застосовується теорема 2.6.2 з [7, с. 133], яка стверджує, що оператор AA^* має бути стискуючим. Ця умова визначається нерівністю

$$\alpha > 2 \|AA^*[f(P - |f|^2)]\|. \quad (25)$$

Результати числових розрахунків показують, що умова (25) є завищеною, і для деяких значень параметрів задачі ітераційний процес (24) збігається для значень α , які не задовольняють оцінку (25).

На рис. 13 показано залежність збіжності ітераційного процесу (24) від значень параметра α для заданої енергетичної ДН $P(x_1, x_2) \equiv 1$ при фіксо-

ваних значеннях $\beta = 0.1$, $c_1 = c_2 = 2.0$; кількість випромінювачів $M_2 \times N_2 = 11 \times 11 = 121$, задана точність для ітераційного процесу $\varepsilon = 10^{-3}$.

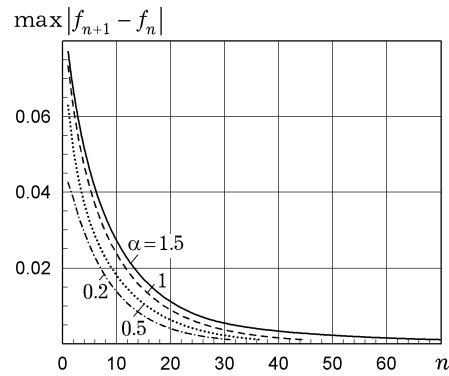


Рис. 13. Характеристика збіжності ітераційного процесу (24) при різних α , $M_2 = N_2 = 11$.

Результати розв'язання задачі синтезу для цієї заданої енергетичної ДН при $\alpha = 0.5$ показано на рис. 14. Якість наближення до заданої ДН $P(x_1, x_2)$ істотно залежить від параметрів c_1 і c_2 при фіксованих M_2 і N_2 . Так, середньоквадратичне відхилення (перший член у (3)) дорівнює 0.0847 для $c_1 = c_2 = 1.0$ і 0.0075 для $c_1 = c_2 = 3.14$.

Синтезована ДН $|f(x_1, x_2)|$ для більших c_1 , c_2 має не тільки менше середньоквадратичне відхилення, але вона також є ближчою за формою до заданої ДН $P(x_1, x_2)$. Оптимальні амплітуди струмів $|I_{nm}|$ в елементах решітки є близькими до постійних при таких значеннях параметрів c_1 і c_2 .

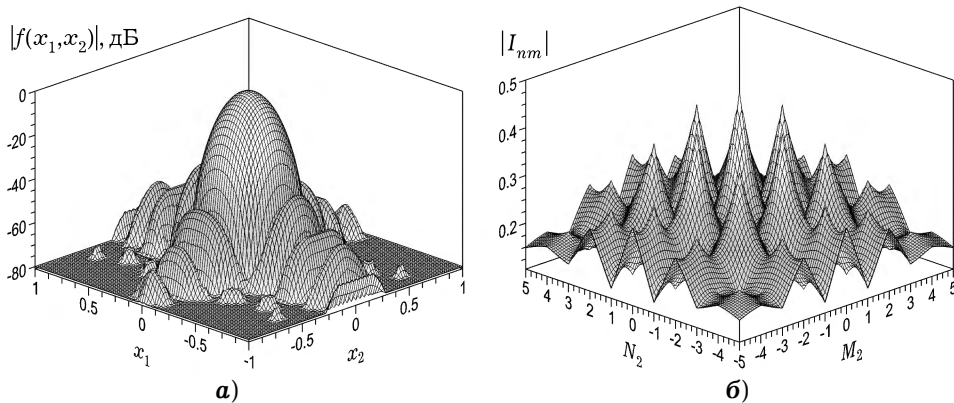


Рис. 14. (а) Синтезована ДН $|f|$; (б) оптимальний розподіл струмів $|I_{nm}|$ при $c_1 = c_2 = 1.0$.

При розв'язуванні задач синтезу для заданої енергетичної ДН більш складної форми якість апроксимації суттєво залежить як від параметра α , так і від типу початкового наближення фазової енергетичної ДН. На рис. 15 показано результати для заданої енергетичної ДН

$$P(x_1, x_2) = |\sin(\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2)|, \quad -1 \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_2 \leq 1,$$

при $c_1 = c_2 = 3.14$ та $\alpha = 0.2$. Незважаючи на те, що форма заданої ДН $P(x_1, x_2)$ є більш складною, ніж у попередньому прикладі, зменшення α (від 0.5 до 0.2) та одночасне збільшення c_1 і c_2 (від 1.0 до 3.14) дозволяє

отримати амплітуду $|f(x_1, x_2)|$ синтезованої ДН, яка є досить близькою до $\sqrt{P(x_1, x_2)}$. Оптимальний розподіл амплітуд струмів $|I_{mn}|$ (рис. 15б) у цьому випадку має характерний вигляд з двома максимумами.

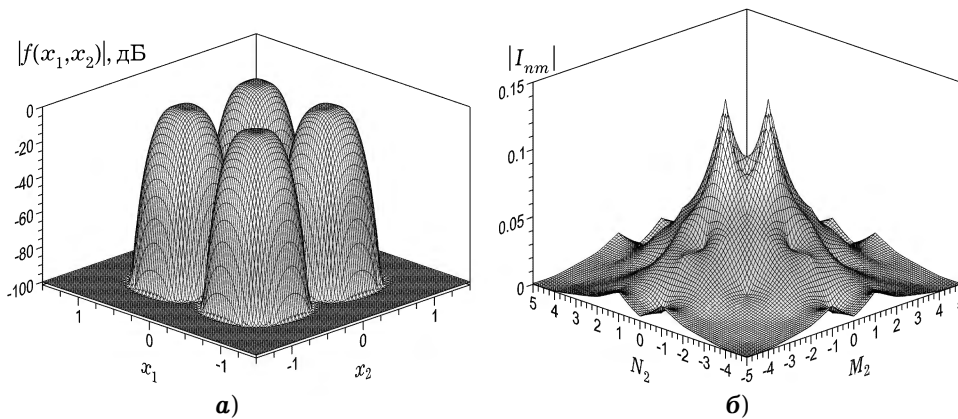


Рис. 15. (а) Синтезована ДН $|f|$ при $c_1 = c_2 = 3.14$; (б) оптимальний розподіл струмів $|I_{mn}|$.

Як показали результати числових розрахунків, використання додаткового параметра оптимізації β у рівнянні (24) значно прискорює збіжність ітераційного процесу. На рис. 16 подано результати дослідження впливу цього параметра на швидкість збіжності при фіксованому значенні параметра $\alpha = 0.5$. Результати наведено для заданої енергетичної ДН $P(x_1, x_2) \equiv 1$ при $c_1 = c_2 = 2.0$. Для досягнення точності обчислень $\varepsilon = 10^{-3}$ необхідно $n = 157$ ітерацій при $\beta = 0.01$. Якщо параметр β збільшується до певного значення, то кількість ітерацій істотно зменшується. Так, при $\beta = 0.05$, $\beta = 0.1$, $\beta = 0.15$, $\beta = 0.2$ і $\beta = 0.25$ для досягнення заданої точності необхідно $n = 62$, 37 , 28 , 20 і 16 ітерацій відповідно. При подальшому збільшенні β кількість необхідних ітерацій починає зростати і вже при $\beta = 0.3$ ітераційний процес починає розбігатися. Числові розрахунки показують, що граничне значення β , при якому ітераційний процес (24) починає розбігатися, істотно залежить від значення параметра α . Якщо параметр α зменшується, то порогове значення β збільшується. Залежність збіжності від параметрів решітки c_1 , c_2 , M_2 , N_2 , d_1 , d_2 не є настільки істотною.

Значення функціонала (3) для синтезованої ДН з різними типами парності наведено на рис. 17. Суцільна крива відповідає фазовій ДН, парній відносно двох осей, пунктирна крива відповідає фазовій ДН, парній відносно однієї осі і непарній відносно іншої, штрихпунктирна крива відповідає фазовій ДН, непарній відносно обох осей.

Бачимо, що значення функціонала при фіксованих c_1 і c_2 істотно залежать від фази синтезованої ДН. Значення $\sigma = 0.2$ досягається для розв'язку, який є «парний – парний» при $c_1 = c_2 = 0.79$, для розв'язку, який є «парний – непарний» – при $c_1 = c_2 = 0.71$, і для розв'язку, який є «непарний – непарний» – при $c_1 = c_2 = 0.625$. Тобто в рамках використаного критерію останній тип розв'язку є на 21% кращим від першого в розумінні розміру решітки ($c_i = kd_i \sin \alpha_i$, $i = 1, 2$). Звідси випливає, що при фіксованій відстані d_i між випромінювачами кількість елементів решітки може бути зменшена на 21% при тому самому значенні середньоквадратичного відхи-

лення. Подібну ситуацію спостерігаємо і для ДН, для якої $\sigma = 0.1$: «непарний – непарний» розв’язок на 19.4% кращий, ніж «парний – парний».

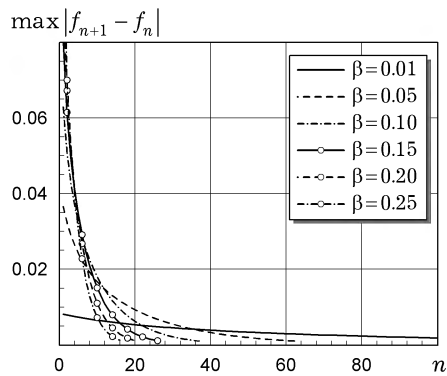


Рис. 16. Збіжність ітераційного процесу (24) при різних значеннях β .

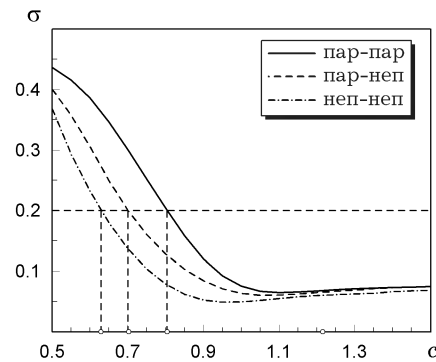


Рис. 17. Значення функціонала (3) для різних фазових ДН.

Висновки. Задача знаходження розв’язків нелінійних інтегральних рівнянь, які виникають у задачах синтезу за заданою енергетичною ДН для плоских решіток, і їхніх властивостей зводиться до дослідження нелінійних двовимірних задач на власні значення, що приводить до подальшого застосування методу неявних функцій для розв’язання задачі Коші для лінійного диференціального рівняння. Область ненульових розв’язків наведених вище рівнянь визначається за допомогою розв’язання трансцендентного рівняння, яке отримується шляхом прирівнювання до нуля визначника, пов’язаного з проблемою власних значень. Результати розв’язування нелінійних задач на власні значення в подальшому застосовуються для уточнення точок біфуркації та отримання біфуркаційних кривих. Підхід не залежить від форми оператора, що визначає властивості випромінювання фізичної системи (плоскі прямокутні та гексагональні решітки). Отримані результати є конструктивною основою, на якій чисельно розв’язано низку практичних інженерних задач синтезу.

1. Андрийчук М. И., Войтович Н. Н., Савенко П. А., Ткачук В. П. Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. Андрийчук М. И., Кравченко В. Ф., Савенко П. А., Ткач М. Д. Синтез плоских излучающих систем по заданной энергетической диаграмме направленности // Физ. основы приборостроения. – 2013. – 2, № 3. – С. 40–55. – <https://doi.org/10.25210/jfor-1303-040055>.
3. Булацук О. О., Войтович М. М., Каценеленбаум Б. З., Тополок Ю. П. Фазові оптимізаційні задачі. Застосування в теорії хвильових полів. – Київ: Наук. думка, 2012. – 318 с.
4. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 528 с.
5. Кравченко В. Ф., Процак Л. П., Савенко П. А., Ткач М. Д. Математические особенности синтеза плоских эквидистантных антенных решеток по заданной амплитудной диаграмме направленности // Антенны. – 2010. – № 3(154). – С. 34–48.
6. Савенко П. А., Процак Л. П. Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
Te same: Savenko P. A., Protsakh L. P. Implicit function method in solving a two-dimensional nonlinear spectral problem // Russian Math. (Izv. VUZ). – 2007. – 51, No. 11. – P. 40–43. – <https://doi.org/10.3103/S1066369X07110060>.
7. Савенко П. О. Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв’язування). – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2002. – 320 с.

8. Склянин Е. К. Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное интегральное уравнения Шредингера // Докл. АН СССР. – 1979. – **244**, № 6. – С. 1337–1341.
9. Тартаковский Л. Б., Тихонова В. К. Синтез линейного излучателя с заданным распределением амплитуд // Радиотехника и электроника. – 1959. – **4**, № 12. – С. 2016–2019.
10. Чони Ю. К синтезу антенной системы по заданной амплитудной диаграмме // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1968. – **11**, № 12. – С. 1325–1327.
11. *Andriychuk M. I.* Antenna synthesis through the characteristics of desired amplitude. – Newcastle, UK: Cambridge Scholars Publishing, 2019. – xvi+150 p.
12. *Andriychuk M. I., Savenko P. O., Tkach M. D.* Synthesis of plane equidistant array according to power radiation pattern // Proc. of 17th Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2012), September 24–27, 2012, Tbilisi. – Lviv–Tbilisi, 2012. – P. 68–74.
13. *Andriychuk M. I., Voitovich N. N.* Antenna synthesis according to power radiation pattern with condition of norm equality // Proc. of 18th Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2013), September 23–26, 2013, Lviv. – Lviv–Tbilisi, 2013. – P. 137–140.
14. *Andriychuk M., Savenko P., Tkach M.* Non-linear synthesis problems for plane radiating systems according to the prescribed power directivity pattern // Open J. Antenn. Propag. – 2013. – **1**, No. 2. – P. 23–34.
– <https://doi.org/10.4236/ojapr.2013.12006>.
15. *Andriychuk M., Voytovych M.* Modified Newton method for antenna power synthesis problem with fixed norm of the pattern // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2014. – № 2(116). – С. 3–10.
16. *Bauschke H. H., Combettes P. L., Luke D. R.* Phase retrieval, error reduction algorithm, and Fienup variants: A view from convex optimization // J. Optical Soc. Am. – 2002. – **19**, No. 7. – P. 1334–1345.
– <https://doi.org/10.1364/JOSAA.19.001334>.
17. *Burge R. E., Fiddy M. A., Greenaway A. H., Ross G.* The phase problem // Proc. R. Soc. London. **A**. – 1976. – **350**, No. 1661. – P. 191–212.
– <https://doi.org/10.1098/rspa.1976.0103>.
18. *Colton D., Kirsch A.* A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region // Inverse Probl. – 1996. – **12**, No. 4. – P. 383–393.
– <https://doi.org/10.1088/0266-5611/12/4/003>.
19. *Deufhard P.* Newton methods for nonlinear problems. Affine invariance and adaptive algorithms. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. – xii+424 p. – Springer Ser. in Comput. Math., Vol. 35.
20. *Dumber A. S.* On the theory antenna beam scanning // J. Appl. Phys. – 1958. – **13**, No. 5. – P. 31–39.
21. *Fienup J. R.* Phase retrieval algorithm: a comparison // Appl. Optics. – 1982. – **21**, No. 15. – P. 2758–2769. – <https://doi.org/10.1364/AO.21.002758>.
22. *Gantmacher F. R.* The theory of matrices. – Vol. 1. – New York: Chelsea Publ. Co., 1959. – x+377 p.
23. *Hauptman H. A., Langs D. A.* The phase problem in neutron crystallography // Acta Crystallogr. **A**. – 2003. – **59**, No. 3. – P. 250–254.
– <https://doi.org/10.1107/S010876730300521X>.
24. *Ikehata M.* Reconstruction of an obstacle from the scattering amplitude at a fixed frequency // Inverse Probl. – 1998. – **14**, No. 4. – P. 949–954.
– <https://doi.org/10.1088/0266-5611/14/4/012>.
25. *Jittorntrum K.* An implicit function theorem // J. Optim. Theory Appl. – 1978. – **25**, No. 4. – P. 575–577. – <https://doi.org/10.1007/BF00933522>.
26. *Masujima M.* Applied mathematical methods in theoretical physics. – Weinheim: Wiley-VCH, 2005. – xi+377 p.
27. *Mehrmann V., Vos H.* Nonlinear eigenvalue problems: a challenge for modern eigenvalue methods // GAMM-Mitteilungen. – 2004. – **27**, No. 2. – P. 121–152.
– <https://doi.org/10.1002/gamm.201490007>.
28. *Precup R.* Methods in nonlinear integral equation. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 2002. – xiv+218 p.
29. *Ramm A. G.* Multidimensional inverse scattering problems. – New York: Longman Scientific & Wiley, 1992. – 379 p.
30. *Ruhe A.* Algorithms for the nonlinear eigenvalue problem // SIAM J. Numer. Anal. – 1973. – **10**, No. 4. – P. 674–689. – <https://doi.org/10.1137/0710059>.

31. *Savenko P.* Computational methods in the theory of synthesis of radio and acoustic radiating systems // *Appl. Math.* – 2013. – **4**, No. 3. – P. 523–549. – <https://doi.org/10.4236/am.2013.43078>.
32. *Savenko P., Tkach M.* Numerical approximation of real finite nonnegative function by the modulus of discrete Fourier transform // *Appl. Math.* – 2010. – **1**, No. 1. – P. 65–75. – <https://doi.org/10.4236/am.2010.11008>.
33. *Taylor G.* The phase problem // *Acta Crystallogr. D.* – 2003. – **59**, No. 11. – P. 1881–1890. – <https://doi.org/10.1107/S0907444903017815>.
34. *Zenkova C. Y., Gorsky M. P., Ryabiy P. A., Angelskaya A. O.* Additional approaches to solving the phase problem in optics // *Appl. Optics.* – 2016. – **55**, No. 12. – P. B78–B84. – <https://doi.org/10.1364/AO.55.000B78>.

BRANCHING OF SOLUTIONS OF THE NONLINEAR EQUATIONS ARISING IN THE PROBLEMS OF SYNTHESIS OF THE PLANE ANTENNA ARRAYS

In the process of solving the problems of synthesis according to the given amplitude characteristics, the necessity to apply a nonlinear spectral theory often arises. The practical statement of synthesis problems consists in using the amplitudes of the required functions. The standard method of optimization is the derivation of the Euler equation for the functional, which is used as an optimization criterion. As a rule, such an equation is integral and nonlinear due to the specificity of the problem statement. The nonuniqueness of the solutions and their branching or bifurcation is specified for such an equation. Finding the branched solutions requires investigation of the corresponding homogeneous equations and the corresponding eigenvalue problem. The study of the problem allows us to determine the set of points of the input parameters at which the corresponding eigenvalues are equal to unity, which determines the branching points of the solutions. Calculation data testify to the ability of the proposed approach to determine numerically the solutions of nonlinear equations, their properties, and branching points of the solutions with low computational costs.

Key words: *nonlinear integral equations, variational approach, directivity pattern, nonlinear eigenvalue problem, bifurcation of solutions, numerical modeling.*

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
26.03.22

² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів