

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕЗАМКНУТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК РІЗНОГО ЕЛІПТИЧНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Проведено дослідження вільних коливань незамкнених некругових циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом. Розроблено розрахункову модель на основі методу скінченних елементів. Обчислення виконано для декількох варіантів граничних умов на торцях. Чисельний аналіз дав можливість встановити залежності частот і форм вільних коливань некругових циліндричних оболонок від значення ексцентриситету еліпсоїдального поперечного перерізу і характеру розрізування оболонок. Отримані результати є важливими для оцінки несучої здатності конструкційних оболонкових елементів відповідної форми.

Ключові слова: незамкнуті циліндричні оболонки, ексцентриситет, вільні коливання, граничні умови, метод скінченних елементів.

Вступ. У багатьох галузях сучасної техніки та будівництва широке застосування знаходять незамкнуті оболонкові елементи конструкцій різних поперечних перерізів, які мають високу міцність при порівняно невеликій масі. При експлуатації таких конструкцій необхідно володіти інформацією про їхню міцність і стійкість. У свою чергу, важливим аспектом у забезпеченні надійності таких оболонкових елементів є визначення частот і форм вільних коливань з високою точністю з урахуванням властивостей матеріалу і граничних умов, що є актуальною проблемою прикладної математики і механіки. У зв'язку з цим особливого значення набувають чисельні методи визначення динамічних характеристик таких конструкцій.

Важливу роль у теорії циліндричних оболонок некругових поперечних перерізів відіграють роботи Я. М. Григоренка. У працях [6, 8] наведено підхід на основі тривимірних рівнянь пружності до розв'язування граничних задач про визначення напружень порожнистих циліндрів із гофрованим еліптичним перерізом [6] та ортотропних циліндрів некругового перерізу [8]. Вплив частоти й амплітуди гофрування на поля переміщень і напружень гофрованих еліптичних циліндрів проаналізовано в [7]. У роботі [9] дослідження напруженого стану нетонких еліптичних циліндричних оболонок виконано в просторовій та уточненій постановках. У праці [5] розв'язано неklasичну задачу про напружений стан ортотропних тороїдальних оболонок із застосуванням підходу на основі прямоелементної моделі. У [12] отримано розв'язок тривимірної крайової задачі про напруження порожнистих неоднорідних ортотропних циліндрів із поперечним перерізом у вигляді опуклих напівгофр.

Для об'єктів простої геометричної форми розв'язки задач про визначення частот вільних коливань у рамках теорії тонких оболонок наведено в [3, 4, 13]. Теоретичні дослідження вільних коливань об'єктів складної геометричної форми пов'язані зі значними труднощами реалізації математичної моделі та необхідністю розв'язання складної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. При цьому спостерігається нестійкість розрахунку і втрата необхідного порядку точності обчислень. У випадку циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом доцільно використовувати чисельні методи. Одним із сучасних методів дослідження частот і форм вільних коливань є метод скінченних елементів (МСЕ), який лежить в основі роботи багатьох інженерних програм, зокрема програми Femap з розв'язувачем NX Nastran. Цей програмний засіб використовують для дослідження частот вільних коливань циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом [1, 2, 10, 11].

✉ ayagrigenko1991@gmail.com

Метою цієї роботи є обчислення методом скінченних елементів частот вільних коливань незамкнених циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різними значеннями ексцентриситету та різними способами розрізування оболонок, а також різними варіантами закріплення торців.

1. Основні співвідношення. При розрахунку динамічних процесів за допомогою МСЕ рівняння руху механічної системи зі скінченною кількістю ступенів вільності за відсутності зовнішніх сил описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1)$$

де $L = T - U$. Використовуючи дискретну форму функціоналів кінетичної енергії T та енергії деформації U відповідно

$$T = \frac{1}{2} \dot{\Phi}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\Phi}_i,$$

$$U = \frac{1}{2} \Phi_i^T \mathbf{K}_i \Phi_i,$$

де \mathbf{K}_i та \mathbf{M}_i – матриця жорсткості та матриця мас i -го скінченного елемента відповідно, Φ_i – вектор вузлових переміщень i -го елемента, з рівняння Лагранжа (1) отримуємо рівняння руху за відсутності демпфування

$$\mathbf{K}\Phi_j + \mathbf{M}\ddot{\Phi}_j = 0 \quad (2)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно; Φ_j – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -му ступеню вільності і відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок усі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу

$$\Phi_j(t) = \Phi_j \sin \omega_j t. \quad (3)$$

Після підстановки функцій (3) у рівняння руху (2) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\Phi_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (4)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує метод Ланцоша як основний, що вимагає менших ресурсів порівняно з іншими методами. Метод Ланцоша дозволяє визначити n -ту кількість необхідних власних значень і форм, при цьому результати можна вважати практично точними для цієї дискретної моделі, оскільки похибка становить

$$\frac{\|\Phi_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}\Phi_j\|}{\|\Phi_j\|} \leq 10^{-7}.$$

У методі Ланцоша використовується зведення матриці \mathbf{T} до тридіагонального вигляду:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_k, \quad (5)$$

де $\mathbf{Q}_k = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times k$; N_{eq} – кількість рівнянь; k – номер кроку за методом Ланцоша; \mathbf{q}_k – k -й вектор Ланцоша.

Вираз

$$\beta_{k+1} \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{q}_k - \alpha_k \mathbf{q}_k - \beta_k \mathbf{q}_{k-1} \quad (6)$$

генерує наступний вектор Ланцоша \mathbf{q}_{k+1} і визначає поточний рядок матриці \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо задачу на власні значення:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \mathbf{s}_h^k - \lambda_h^k \mathbf{s}_h^k &= 0, & h = 1, 2, \dots, k, \\ (\omega_h^k)^2 &= 1/\lambda_h^k, \end{aligned} \quad (7)$$

де ω_h^k – k -та апроксимація кругової частоти ω_h , $h = 1, 2, \dots, n$; n – число власних пар.

Алгоритм продовжує обчислення (при збільшенні номера кроку k процедури Ланцоша) до тих пір, поки не буде досягнуто заданої точності за всіма необхідними власними значеннями.

Процедура вибіркової ортогоналізації підтримує необхідний рівень ортогоналізації векторів Ланцоша \mathbf{q}_k , що забезпечує надійність і стійкість процесу обчислень. При цьому застосовуються економічні методи для реалізації процедури вибіркової ортогоналізації і для визначення власних значень (7) шляхом використання подвійних QR -ітерацій зі зсувами. Вихідні власні вектори визначаються за формулою

$$\Phi_h^k = \mathbf{Q} \mathbf{s}_h^k, \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

2. Побудова розрахункової моделі. Для виконання обчислювального експерименту за допомогою процесора FEMAP побудовано геометрії циліндричних оболонок висотою $h = 120$ мм, товщиною $d = 2$ мм, еліптичного поперечного перерізу з різними значеннями ексцентриситету ε . Залежність великої півосі серединної поверхні a_c і малої півосі серединної поверхні b_c від ексцентриситету ε наведено в табл. 1. Всі оболонки розрізались наполовину двома способами: вздовж великої осі і твірної (рис. 1а) і вздовж малої осі і твірної (рис. 1б).

Таблиця 1

	ε				
	0	0.1	0.2	0.3	0.4
a_c	43.547	43.657	43.992	44.574	45.444
b_c	43.547	43.438	43.103	42.512	41.651
	ε				
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
a_c	46.674	48.386	50.810	54.434	60.656
b_c	40.421	38.709	36.285	32.661	26.439

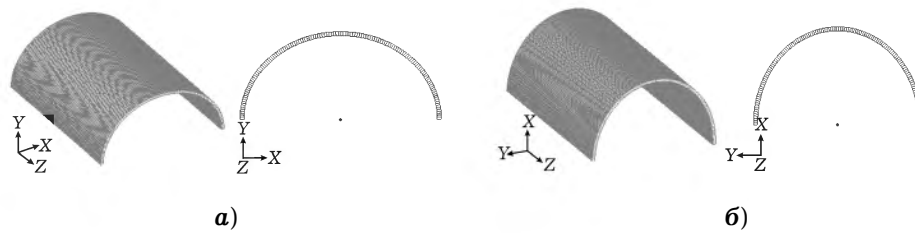


Рис. 1

Матеріалом оболонок вибрали сталь із такими характеристиками: модуль Юнга $E = 214$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.32$, густина $\rho = 7820$ кг/м³. Скінченноелементну розбивку проводили *plate*-елементами з розміром сторони 1 мм. Оболонки досліджували при різних варіантах жорстко закріплених (С) і вільних торців (F) (рис. 2). Виконано обчислення частот і форм вільних коливань.

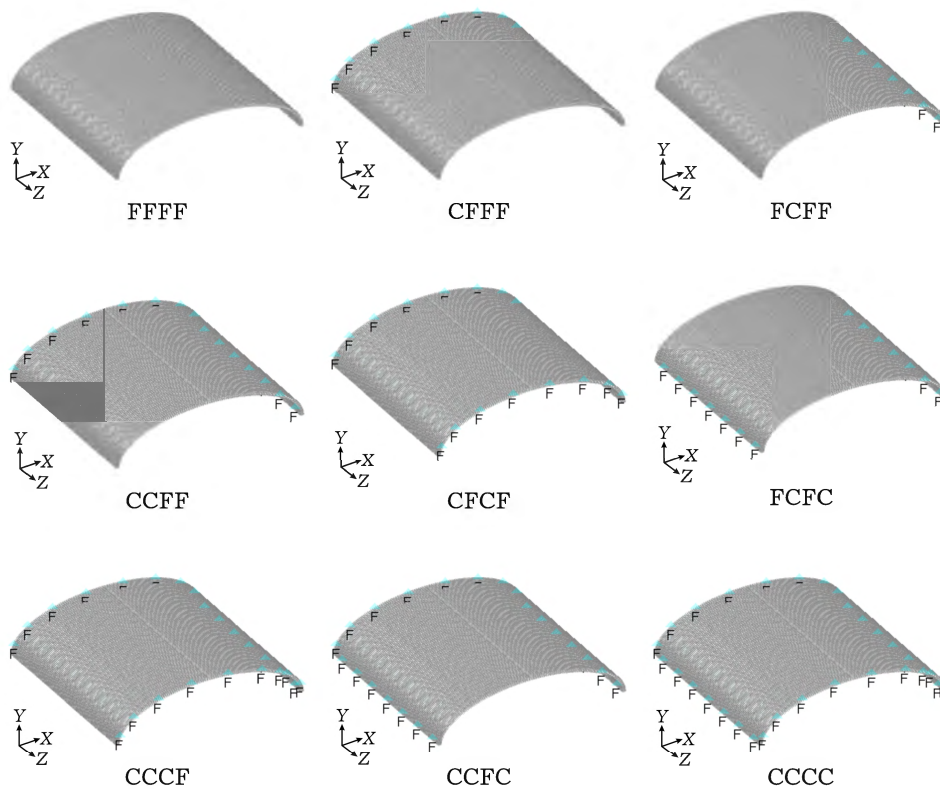


Рис. 2

3. Аналіз результатів. Внаслідок проведених числових розрахунків отримано частоти вільних коливань сталених незамкнених циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різним значенням ексцентриситету, розрізаних наполовину вздовж великої осі і твірної, з граничними умовами CFFF, які наведено в табл. 2 і у вигляді точкової діаграми на рис. 3, де показано залежність частот f з відповідними порядковими номерами від значень ексцентриситету оболонки ε .

Таблиця 2

№	$f, \text{Гц}$									
	ε									
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	757	758	762	768	776	787	801	816	829	755
2	845	846	849	854	860	868	874	873	851	817
3	1736	1735	1735	1734	1732	1728	1721	1708	1672	1294
4	2259	2257	2248	2226	2188	2126	2032	1891	1687	1642
5	2372	2377	2391	2416	2451	2502	2568	2647	2728	2675
6	2412	2413	2420	2435	2462	2506	2571	2663	2777	2860
7	3129	3130	3131	3134	3136	3138	3137	3130	3108	3024
8	4439	4446	4467	4502	4544	4582	4576	4494	4308	3618
9	4454	4463	4488	4533	4597	4681	4698	4611	4331	3993
10	4770	4770	4768	4765	4760	4755	4830	4955	4859	4728

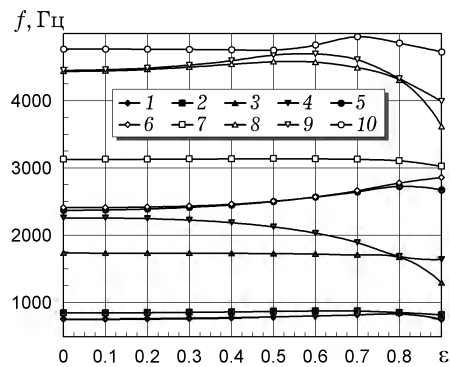


Рис. 3

Перші десять частот вільних коливань сталених незамкнених циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різними значеннями ексцентриситету, розрізаних наполовину вздовж малої осі і твірної, з граничними умовами CFFF наведено в табл. 3 і на точковій діаграмі на рис. 4.

Таблиця 3

№	$f, \text{Гц}$									
	ε									
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	757	756	753	747	737	723	704	675	631	559
2	845	844	841	836	826	812	791	757	703	604
3	1736	1736	1736	1736	1735	1733	1725	1706	1658	1522
4	2259	2262	2266	2265	2248	2207	2140	2041	1894	1654
5	2372	2368	2354	2329	2293	2242	2173	2078	1944	1736
6	2412	2411	2409	2414	2436	2481	2546	2624	2673	2538
7	3129	3129	3127	3124	3117	3107	3090	3066	3061	3182
8	4439	4432	4410	4370	4310	4218	4093	3921	3680	3307
9	4454	4446	4420	4376	4310	4223	4101	3933	3694	3323
10	4770	4771	4772	4774	4776	4777	4777	4689	4485	4022

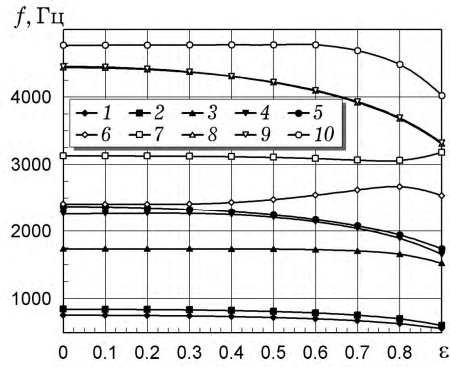


Рис. 4

Якщо умовно з'єднати точки частот одного порядкового номера лініями, то можна побачити характер зміни частоти цього порядкового номера від значення ексцентриситету. Порівнюючи діаграми на рис. 3 і рис. 4, можна спостерігати кращу подібність характеру зміни частоти для всіх частот при розрізанні оболонки вздовж малої осі і твірної. Максимальні відхилення між частотами одного порядкового номера в обох варіантах розрізання спостерігається на восьмій частоті, а мінімальне – при розрізанні оболонки вздовж великої осі і твірної на другій частоті, а також при розрізанні оболонки вздовж малої осі і твірної на сьомій частоті. При другому варіанті розрізання спостерігається більше подібних пар кривих, що відображають схожий характер зміни частоти. Подібні криві спостерігаються у роботі [2] при встановленні залежності вільних коливань пружних ізотропних замкнутих некругових циліндричних оболонок від зміни ексцентриситету еліпса поперечного перерізу з жорстко закріпленим одним торцем.

Перші десять форм коливань для оболонок з двома різними варіантами розрізання при значенні ексцентриситету $\varepsilon = 0.9$ з граничними умовами CFFF наведено на рис. 5 і рис. 6.

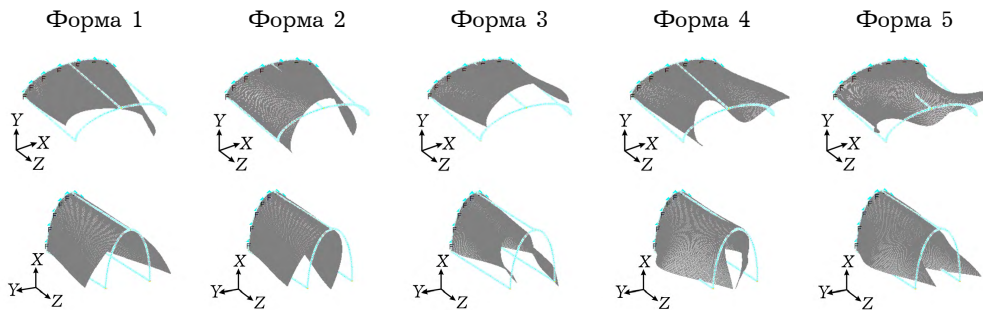


Рис. 5

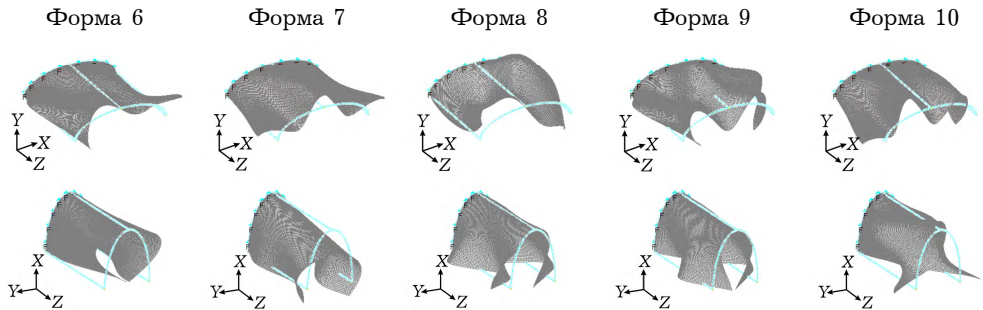


Рис. 6

Перші десять частот вільних коливань сталених незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різними значеннями ексцентриситету, розрізаних наполовину вздовж великої осі і твірної, з граничними умовами CFCF наведено в табл. 4 і на точковій діаграмі на рис. 7.

Таблиця 4

№	$f, \text{Гц}$									
	ε									
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	2051	2055	2068	2091	2125	2172	2236	2321	2424	2373
2	2083	2087	2101	2124	2158	2206	2269	2349	2430	2490
3	4087	4095	4119	4162	4224	4289	4222	4103	3896	3309
4	4114	4122	4147	4191	4256	4314	4438	4360	3995	3570
5	4360	4359	4354	4345	4325	4350	4482	4607	4817	4363
6	4858	4854	4843	4819	4776	4701	4574	4668	4929	4849
7	5838	5836	5832	5826	5816	5804	5784	5747	5553	5023
8	6639	6650	6683	6742	6825	6913	6729	6266	5660	5391
9	6652	6663	6698	6760	6853	6987	7177	6955	6327	5439
10	7724	7703	7640	7529	7369	7173	7207	7447	6970	6306

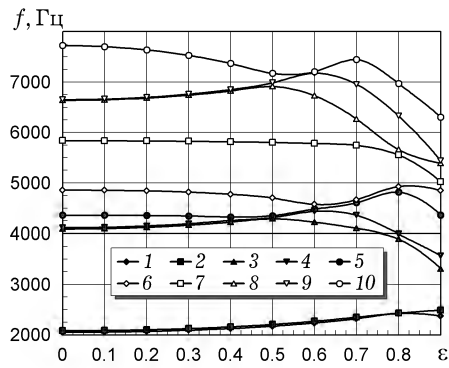


Рис. 7

Перші десять частот вільних коливань сталених незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різними значеннями ексцентриситету, розрізаних наполовину вздовж малої осі і твірної, з граничними умовами CFCF наведено в табл. 5 і на точковій діаграмі на рис. 8.

Таблиця 5

№	$f, \text{Гц}$									
	ε									
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	2051	2047	2034	2011	1977	1929	1864	1774	1647	1444
2	2083	2079	2065	2042	2007	1957	1889	1794	1658	1450
3	4087	4079	4055	4014	3953	3868	3753	3598	3383	3060
4	4114	4106	4081	4039	3976	3890	3774	3617	3400	3074
5	4360	4361	4364	4367	4366	4355	4320	4233	4038	3590
6	4858	4861	4870	4882	4891	4886	4846	4736	4489	3940
7	5838	5839	5844	5853	5866	5888	5918	5944	5671	5242
8	6639	6628	6594	6536	6451	6332	6174	5962	5673	5248
9	6652	6640	6606	6546	6459	6339	6178	5971	5943	5687
10	7724	7744	7763	7773	7772	7740	7643	7421	6969	6055

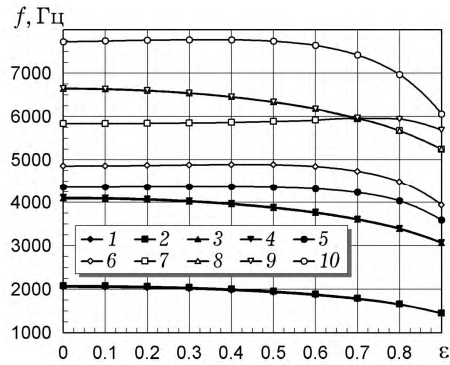


Рис. 8

Порівнюючи діаграми на рис. 7 і рис. 8, можемо спостерігати, як і при варіанті закріплення CFFF, кращу подібність характеру зміни частоти для всіх значень ексцентриситету при розрізанні оболонки вздовж малої осі і твірної. При розрізанні оболонки вздовж великої осі і твірної характер зміни частоти для всіх значень ексцентриситету є неоднозначним. Максимальні відхилення між частотами одного порядкового номера в обох варіантах розрізання спостерігаються, як і в попередньому випадку, на вищих частотах, а мінімальне – для оболонок, розрізаних уздовж великої осі і твірної, на шостій частоті і для оболонок, розрізаних уздовж малої осі і твірної, на першій частоті. При другому варіанті розрізання спостерігається подібність для усіх кривих, що відображає схожий характер зміни частоти.

Перші десять форм коливань для оболонок з двома різними варіантами розрізання при значенні ексцентриситету $\epsilon = 0.9$ з граничними умовами CFCF наведено на рис. 9 і рис. 10.

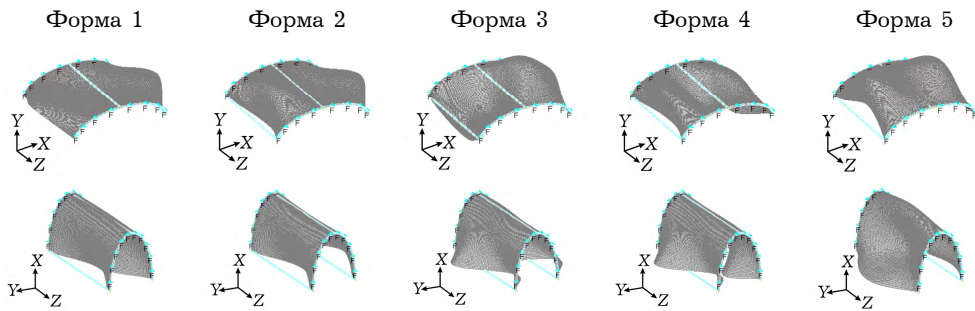


Рис. 9

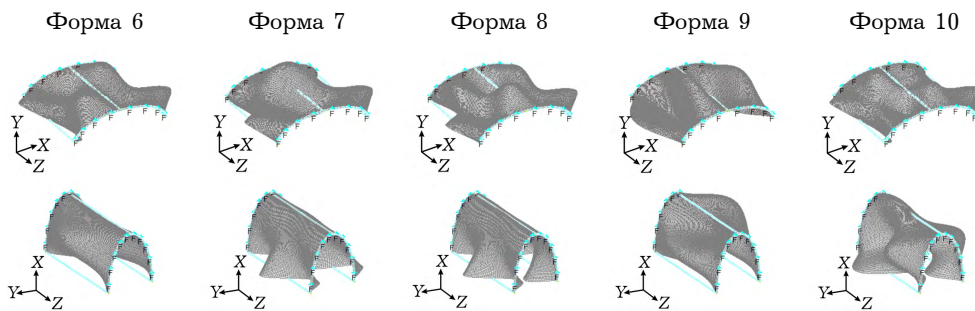


Рис. 10

Перші десять частот вільних коливань сталених незамкнених циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу зі значенням ексцентриситету $\epsilon = 0.9$, розрізаних наполовину вздовж малої осі і твірної, з різними граничними умовами на торцях наведено в табл. 6.

Таблиця 6

№	$f, \text{Гц}$								
	FFFF	CFFF	FCFF	CCFF	CFCF	FCFC	CCCF	CCFC	CCCC
1	395	755	92	835	2373	1375	2442	2164	3337
2	532	817	218	1399	2490	1893	3270	2612	3762
3	932	1294	465	2341	3309	1999	3664	3862	5337
4	1478	1642	569	2786	3570	2973	4859	4155	5690
5	1865	2675	1354	3608	4363	4248	4947	5415	6165
6	2874	2860	1377	3678	4849	4460	5291	5578	7317
7	3082	3024	2547	4132	5023	4692	6049	5777	7423
8	3226	3618	2559	5180	5391	5494	6698	6227	7635
9	3237	3993	3163	5292	5439	5588	7296	6546	8010
10	4286	4728	4199	5516	6306	6118	7470	7569	9396

Перші десять частот вільних коливань сталених незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу для значення ексцентриситету $\varepsilon = 0.9$, розрізаних наполовину вздовж великої осі і твірної, з різними граничними умовами на торцях наведено в табл. 7.

Порівнюючи частоти, подані в табл. 6 і табл. 7, можемо спостерігати мінімальні значення для перших десяти частот для оболонок з граничними умовами FCFF і максимальні частоти – для оболонок з граничними умовами CCCC. Перші сім частот для оболонок з вільними краями є значно вищими, ніж перші сім частот для оболонок з граничними умовами FCFF, і мають малі відхилення між 8-ю і 10-ю частотами.

Таблиця 7

№	$f, \text{Гц}$								
	FFFF	CFFF	FCFF	CCFF	CFCF	FCFC	CCCF	CCFC	CCCC
1	379	559	148	602	1444	874	1448	2690	4469
2	439	604	215	1646	1450	2425	3067	2745	5254
3	643	1522	268	1871	3060	2505	3703	4526	5814
4	1251	1654	449	2752	3074	3644	4950	4932	7026
5	1529	1736	1053	3314	3590	4398	5245	5711	7131
6	1909	2538	1232	4095	3940	4852	5687	6710	7218
7	1936	3182	1924	4139	5242	5645	6161	6798	8874
8	2444	3307	2439	4589	5248	6135	7096	7474	9130
9	2746	3323	2606	5462	5687	6631	7283	7593	9159
10	3551	4022	3582	5568	6055	6766	7985	7598	9473

Висновки. За допомогою програми FEMAP з розв'язувачем NX Nastran, в основі якої покладено метод скінченних елементів, проведено розрахунки частот і форм вільних коливань ізотропних незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу.

На основі отриманих результатів встановлено залежності частот вільних коливань від значення ексцентриситету еліпса, які для оболонок, розрізаних наполовину вздовж малої осі і твірної, показали подібність до залежностей, встановлених при дослідженні вільних коливань пружних ізотропних замкнутих некругових циліндричних оболонок різних ексцентриситетів. Спосіб перерізування оболонок значно впливає на характер зміни частоти одного порядкового номера залежно від значення ексцентриситету. Комбінування різних варіантів жорсткого закріплення і вільних країв дає можливість керувати частотами вільних коливань у достатньо широкому діапазоні. Реалізовані в роботі підходи дають можливість досліджувати динамічні характеристики оболонок інших конфігурацій і можуть бути використані для оцінки точності інших підходів, а також при аналізі поведінки інших конструкційних елементів.

1. Будак В. Д., Григоренко А. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук Е. В. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 1. – С. 145–152.
Te same: Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Borisenko M. Yu., Boichuk E. V. Determination of the natural frequencies of an elliptic shell of constant thickness by the finite-element method // *J. Math. Sci.* – 2016. – **212**, No. 2. – P. 182–192. – <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2658-0>.
2. Будак В. Д., Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В. Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик // *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2015. – Вип. 2. – С. 23–28.
3. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // *Прикл. механика.* – 2008. – **44**, № 10. – С. 74–85.
Te same: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Using spline-approximation to solve problems of axisymmetric free vibration of thick-walled orthotropic cylinders // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 10. – P. 1137–1147. – <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0126-6>.
4. Григоренко О. Я., Пархоменко О. Ю., Васильева Л. Я., Борисенко М. Ю. Розв'язання задачі про вільні коливання нетонкої ортотропної пологої оболонки змінної товщини в уточненій постановці // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 1. – С. 121–131.
Te same: Grigorenko O. Ya., Parkhomenko O. Yu., Vasil'eva L. Ya., Borisenko M. Yu. Solution of the problem of free vibrations of a nonthin orthotropic shallow shell of variable thickness in the refined statement // *J. Math. Sci.* – 2018. – **229**, No. 3. – P. 253–268. – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3675-6>.
5. Григоренко Я. М., Авраменко Ю. А. Определение в уточненной постановке напряженного состояния ортотропных тороидальных оболочек // *Прикл. механика.* – 2013. – **49**, № 4. – С. 99–114.
Te same: Grigorenko Ya. M., Avramenko Yu. A. Refined stress analysis of orthotropic toroidal shells // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, No. 4. – P. 461–474. – <https://doi.org/10.1007/s10778-013-0580-z>.
6. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. К решению задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением // *Прикл. механика.* – 2004. – **40**, № 2. – С. 67–73.
Te same: Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Solving the stress problem for hollow cylinders with corrugated elliptical cross section // *Int. App. Mech.* – 2004. – **40**, No. 2. – P. 169–175. – <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000028595.46252.d1>.
7. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. О влиянии частоты и амплитуды гофрировки полых эллиптических цилиндров на их напряженное состояние // *Прикл. механика.* – 2004. – **40**, № 9. – С. 87–93.
Te same: Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Influence of corrugation frequency and amplitude on the stress state of hollow elliptic cylinders // *Int. App. Mech.* – 2004. – **40**, No. 9. – P. 1012–1017. – <https://doi.org/10.1007/s10778-005-0005-8>.
8. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Определение напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с некруговым поперечным сечением // *Прикл. механика.* – 2004. – **40**, № 6. – С. 99–106.
Te same: Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Stress analysis of orthotropic hollow noncircular cylinders // *Int. App. Mech.* – 2004. – **40**, No. 6. – P. 679–685. – <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000041396.60933.52>.
9. Григоренко Я. М., Урусова Г. П., Рожок Л. С. Исследование напряженного состояния нетонких цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением в уточненной и пространственной постановках // *Прикл. механика.* – 2006. – **42**, № 8. – С. 44–57.
Te same: Grigorenko Ya. M., Urusova G. P., Rozhok L. S. Stress analysis of non-thin elliptic cylindrical shells in refined and spatial formulations // *Int. App. Mech.* – **42**, No. 8. – P. 886–894. – <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0156-2>.
10. Grigorenko A. Ya., Borysenko M. Yu., Boychuk O. V., Boreiko N. P. Free vibration of corrugated open cylindrical shells // In: Altenbach H., Bauer S., Eremeyev V. A., Mikhasev G. I., Morozov N. F. (eds). *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures.* – Ser.: *Advanced Structured Materials*, Vol. 151. –

Cham: Springer, 2022. – P. 63–74.

– https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_6.

11. Grigorenko A. Ya., Borysenko M. Yu., Boychuk O. V., Vasil'eva L. Ya. Free vibrations of an open non-circular cylindrical shell of variable thickness // In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W. (eds). Analysis of Shells, Plates, and Beams. – Ser.: Advanced Structured Materials, Vol. 134. – Cham: Springer, 2020. – P. 141–154. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_8.
12. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with a cross-section in the form of convex semi-corrugations // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 4. – С. 109–120.
Те саме: Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with cross sections in the form of convex semicorrugations // *J. Math. Sci.* – 2017. – **220**, No. 2. – P. 133–148.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3172-8>.
13. Pellicano F. Vibrations of circular cylindrical shells: theory and experiments // *J. Sound Vib.* – 2007. – **303**, No. 1-2. – P. 154–170.
– <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.01.022>.

FREE VIBRATIONS OF AN OPEN CYLINDRICAL SHELLS OF VARIOUS ELLIPTICAL CROSS-SECTIONS

The study of free vibrations of open non-circular cylindrical shells with an elliptical cross-section is carried out. A calculation model is developed based on the finite element method. The calculations are performed for several variants of the boundary conditions at the ends. The numerical analysis made it possible to establish the dependence of the frequencies and forms of free vibrations of non-circular cylindrical shells on the value of the eccentricity of the ellipsoidal cross-section and the nature of the cutting of the shells. The obtained results are important for assessing the bearing capacity of structural shell elements of the appropriate form.

Key words: open cylindrical shells, eccentricity, free vibrations, boundary conditions, finite element method.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,

² Миколаїв. нац. аграр. ун-т, Миколаїв,

Одержано

³ Миколаїв. нац. ун-т ім. В. О. Сухомлинського, Миколаїв

14.04.22