УДК 517.95

І. Я. Савка[1✉], І. Р. Тимків[2]

ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ У ВИПАДКУ КРАТНИХ ВУЗЛІВ ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНИХ ОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

Задача розглядається в циліндричній області змінних t, x, яка є декартовим добутком відрізка, що містить нуль, на одиничне коло, і поділена на дві підобласті гіперплощиною $t = 0$. У кожній підобласті розв'язок задачі задовольняє відповідні диференціальні рівняння з багатоточковими умовами у випадку кратних вузлів, а на межі поділу $t = 0$ – умови лінійного спряження. Вигляд області накладає додаткові умови на періодичність розв'язку за просторовою змінною x. Досліджено умови коректної розв'язності задачі у просторі Соболєва, які тісно пов'язані з проблемою малих знаменників і їх оцінюванням. За допомогою метричного підходу встановлено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) векторів, складених із вузлів інтерполяції багатоточкових умов.

Ключові слова: *задача спряження, багатоточкова задача, кратні вузли, гіперболічне рівняння, проблема малих знаменників, простір Соболєва.*

Задачі спряження для диференціальних рівнянь активно вивчаються з огляду на їхні застосування у природознавстві та техніці, наприклад, у механіці рідин [26], газовій динаміці [21], електромагнетизмі [18], задачах переносу [23, 24]. Зокрема, задачами спряження можна моделювати процеси, що проходять у двошарових середовищах із різко відмінними фізичними властивостями. При цьому на одній частині шару області задається одне рівняння, а на другій – інше рівняння, можливо, відмінного типу чи порядку [5, 10, 16, 17]. Для коректної постановки крайової задачі в такій області зазвичай додатково задаються умови спряження (узгодження, склеювання, сполучення або переносу) на межі поділу підобластей середовища (лінії виродження). Питання щодо розв'язності крайових задач для диференціальних рівнянь змішаного типу розглядались у роботах низки авторів (див., наприклад, [2, 6, 8–10, 19, 20, 22–26]). Для обмежених областей крайові задачі, взагалі кажучи, є некоректними за Адамаром, а існування їхніх розв'язків у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників (див., наприклад, [7, 11–13, 15]). Однак маловивченими залишаються задачі спряження для різнотипних рівнянь високих порядків (див. [25]).

1. Постановка задачі. У циліндричній області $D = \{(t,x) : t \in (-T,T), x \in \Omega\}$, де $T > 0$, а Ω – одиничне коло (одновимірний тор), розглядаємо задачу лінійного спряження при $t = 0$ для двох рівнянь строго гіперболічного типу, однорідних за порядком диференціювання, з локальними багатоточковими умовами у випадку кратних вузлів $t_1, \ldots, t_r, t_{r+1}, \ldots, t_{r+\ell}$, де

$$-T \le t_1 < \ldots < t_r < 0 < t_{r+1} < \ldots < t_{r+\ell} \le T .$$

У підобласті $D_- = D \cap \{t < 0\}$ задаємо диференціальне рівняння порядку n з r багатоточковими умовами, а в підобласті $D_+ = D \cap \{t < 0\}$ – рівняння порядку m з ℓ багатоточковими умовами. Умови лінійного спряження при $t = 0$ є узагальненням умов спряження (склеювання) і можуть задаватись подібно до нелокальних умов як лінійна комбінація значень розв'язків при $t = \pm 0$.

Надалі будемо використовувати такі множини та функціональні простори:

✉ s-i@ukr.net

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ − множини натуральних, цілих, дійсних та комплексних чисел відповідно;

$H_q = H_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$, − простір, отриманий поповненням простору скінченних сум $\phi(x) = \sum_k \phi_k e^{ikx}$ за нормою $\|\phi; H_q\| = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi_k|^2 (1+|k|)^{2q}}$, де $\phi_k \in \mathbb{C}$;

$C^n([0,T]; H_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, − простір функцій $u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{ikx}$, $u_k(t) \in C([0,T])$, таких, що для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\dfrac{\partial^s u(t,x)}{\partial t^s} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^{(s)}(t) e^{ikx}$, $s \in \{0,1,\ldots,n\}$, належать до простору H_{q-s} і є неперервними за t в нормі цього простору

$$\|u; C^n([0,T]; H_q)\| = \sqrt{\sum_{s=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^s u(t,\cdot)}{\partial t^s}; H_{q-s} \right\|^2}.$$

Будемо використовувати також таке позначення: $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B$ − міра Лебеґа в $\mathbb{R}^n$ множини $B \subset \mathbb{R}^n$.

Перейдемо до формулювання задачі та означення її розв’язку. В області D розглянемо задачу для двох строго гіперболічних за Петровським диференціальних рівнянь

$$L_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u := \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{s=1}^{n} a_s \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{n-s} \partial x^s} = 0, \qquad (t,x) \in D_-,$$

$$L_2\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u := \frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} + \sum_{s=1}^{m} b_s \frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^{m-s} \partial x^s} = 0, \qquad (t,x) \in D_+, \tag{1}$$

з умовами лінійного спряження при $t = 0$:

$$\lim_{t\to -0} \frac{\partial^{s-1} u(t,x)}{\partial t^{s-1}} - \nu_s \lim_{t\to +0} \frac{\partial^{s-1} u(t,x)}{\partial t^{s-1}} = \varphi_{0,s}(x), \qquad s = 1,\ldots,\theta, \tag{2}$$

і локальними багатоточковими умовами з кратними вузлами інтерполяції

$$\left.\frac{\partial^{q_j-1} u(t,x)}{\partial t^{q_j-1}}\right|_{t=t_j} = \varphi_{j,q_j}(x), \qquad q_j = 1,\ldots,n_j, \qquad j = 1,\ldots,r+\ell, \tag{3}$$

де $a_s, b_s \in \mathbb{R}$, $\nu_s \in \mathbb{C}$, $n, m, \theta, r, \ell \in \mathbb{N}$. Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінною x на задані функції $\varphi_{0,s}$, φ_{j,q_j} та на шуканий розв’язок. Для коректного формулювання приймаємо, що кількість θ умов лінійного спряження задовольняє нерівність $0 < \theta \le \min\{n,m\}$, а кратність вузлів − такі умови:

нехай $n_0 = \theta$ − кратність вузла $t = t_0 = 0$;

$0 < n_j \le n$ і $\sum_{j=1}^{r} n_j \le n$ для лівих вузлів $t = t_j < 0$, $1 \le j \le r$;

$0 < n_j \le m$ і $\sum_{j=r+1}^{r+\ell} n_j \le m$ для правих вузлів $t = t_j > 0$, $r+1 \le j \le \ell$.

Крім цього, приймаємо, що сума порядків рівнянь (1) дорівнює сумі кількості умов лінійного спряження і багатоточкових умов: $n + m = \theta + \sum_{j=1}^{r+\ell} n_j$.

Подібні багатоточкові задачі (без умов спряження) з кратними вузлами для гіперболічного, факторизованого і безтипного рівнянь розглядались відповідно в [1, 3, 4, 14]. У цій роботі розвиваємо та узагальнюємо результати праці [12], у якій досліджено спряжену задачу з простими вузлами інтерполяції у випадку склеювання розв'язку при $t = 0$, тобто коли

$$\nu_1 = \ldots = \nu_\theta = 1 \qquad \text{і} \qquad \varphi_{0,1}(x) \equiv \ldots \equiv \varphi_{0,\theta}(x) \equiv 0 .$$

Означення 1. Розв'язком задачі (1)–(3) називаємо функцію $u = u(t,x)$, що задовольняє такі умови:

$$u \in C^n([-T,0]; H_q), \qquad u \in C^m([0,T]; H_q),$$

$$\left\| L_1 u; C([-T,0]; H_{q-n}) \right\| = 0, \qquad \left\| L_2 u; C([0,T]; H_{q-m}) \right\| = 0 ,$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left\| \frac{\partial^{s-1} u(-\varepsilon,\cdot)}{\partial t^{s-1}} - \nu_s \frac{\partial^{s-1} u(\varepsilon,\cdot)}{\partial t^{s-1}} - \varphi_{0,s}(\cdot); H_{q-s+1} \right\| = 0, \qquad s = 1,\ldots,\theta ,$$

$$\left\| \frac{\partial^{q_j - 1} u(t_j,\cdot)}{\partial t^{q_j - 1}} - \varphi_{j,q_j}(\cdot); H_{q-q_j+1} \right\| = 0, \qquad q_j = 1,\ldots,n_j, \quad j = 1,\ldots,r+\ell .$$

2. Побудова формального розв'язку. Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t) e^{ikx} . \tag{4}$$

За означенням розв'язку кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком звичайного диференціального рівняння у відповідному інтервалі:

$$\frac{d^m u_k(t)}{dt^m} + \sum_{s=1}^{m} b_s (ik)^s \frac{d^{m-s} u_k(t)}{dt^{m-s}} = 0, \qquad 0 < t < T ,$$

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{s=1}^{n} a_s (ik)^s \frac{d^{n-s} u_k(t)}{dt^{n-s}} = 0, \qquad -T < t < 0 , \tag{5}$$

справджує умови лінійного спряження

$$\lim_{t \to -0} \frac{d^{s-1} u_k(t)}{dt^{s-1}} - \nu_s \lim_{t \to +0} \frac{d^{s-1} u_k(t)}{dt^{s-1}} = \varphi_{k,0,s}, \qquad s = 1,\ldots,\theta , \tag{6}$$

і багатоточкові умови

$$\left. \frac{d^{q_j - 1} u_k(t)}{dt^{q_j - 1}} \right|_{t = t_j} = \varphi_{k,j,q_j}, \qquad q_j = 1,\ldots,n_j, \quad 1 \le j \le r+\ell , \tag{7}$$

де φ_{k,j,q_j} – коефіцієнти Фур'є функції φ_{j,q_j}. Строга гіперболічність рівнянь означає, що для кожного $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ корені рівнянь $L_1(\lambda,1) = 0$ і $L_2(\mu,1) = 0$ є простими і дійсними. Позначимо їх відповідно через $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ і $\mu_1,\ldots,\mu_m$.

Розв'язок рівняння (5) при $k \ne 0$ шукаємо у вигляді

$$u_k(t) = \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n} C_s(k) e^{ik\lambda_s t}, & t < 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{m} C_{n+s}(k) e^{ik\mu_s t}, & t > 0, \end{cases} \tag{8}$$

де коефіцієнти $C_s(k)$, $C_{n+s}(k)$ визначаємо із системи рівнянь

$$\sum_{s=1}^{n} C_s(k)(ik\lambda_s)^{q-1} - \nu_q \sum_{s=1}^{m} C_{n+s}(k)(ik\mu_s)^{q-1} = \varphi_{k,0,q}, \qquad q = 1,\ldots,\theta,$$

$$\sum_{s=1}^{n} C_s(k)(ik\lambda_s)^{q_j-1} e^{ik\lambda_s t_j} = \varphi_{k,j,q_j}, \qquad q_j = 1,\ldots,n_j, \quad j = 1,\ldots,r,$$

$$\sum_{s=1}^{m} C_{n+s}(k)(ik\mu_s)^{q_j-1} e^{ik\mu_s t_j} = \varphi_{k,j,q_j}, \qquad q_j = 1,\ldots,n_j, \quad j = r+1,\ldots,\ell,$$

або

$$\sum_{s=1}^{n} C_s(k)(\lambda_s)^{q-1} - \nu_q \sum_{s=1}^{m} C_{n+s}(k)(\mu_s)^{q-1} = \frac{\varphi_{k,0,q}}{(ik)^{q-1}}, \qquad q = 1,\ldots,\theta,$$

$$\sum_{s=1}^{n} C_s(k)(\lambda_s)^{q_j-1} e^{ik\lambda_s t_j} = \frac{\varphi_{k,j,q_j}}{(ik)^{q_j-1}}, \qquad q_j = 1,\ldots,n_j, \quad j = 1,\ldots,r,$$

$$\sum_{s=1}^{m} C_{n+s}(k)(\mu_s)^{q_j-1} e^{ik\mu_s t_j} = \frac{\varphi_{k,j,q_j}}{(ik)^{q_j-1}}, \qquad q_j = 1,\ldots,n_j, \quad j = r+1,\ldots,\ell. \tag{9}$$

Для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ визначник системи (9) має вигляд

$$\Delta(k) = \det \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & \ldots & 1 & -\nu_1 & \ldots & -\nu_1 \\
\lambda_1 & \ldots & \lambda_n & -\nu_2\mu_1 & \ldots & -\nu_2\mu_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda_1^{\theta-1} & \ldots & \lambda_n^{\theta-1} & -\nu_\theta\mu_1^{\theta-1} & \ldots & -\nu_\theta\mu_m^{\theta-1} \\
\hline
e^{ik\lambda_1 t_1} & \ldots & e^{ik\lambda_n t_1} & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\lambda_1^{n_1-1}e^{ik\lambda_1 t_1} & \ldots & \lambda_n^{n_1-1}e^{ik\lambda_n t_1} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
e^{ik\lambda_1 t_r} & \ldots & e^{ik\lambda_n t_r} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\lambda_1^{n_r-1}e^{ik\lambda_1 t_r} & \ldots & \lambda_n^{n_r-1}e^{ik\lambda_n t_r} & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
0 & \ldots & 0 & e^{ik\mu_1 t_{r+1}} & \ldots & e^{ik\mu_m t_{r+1}} \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & \mu_1^{n_{r+1}-1}e^{ik\mu_1 t_{r+1}} & \ldots & \mu_m^{n_{r+1}-1}e^{ik\mu_m t_{r+1}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & e^{ik\mu_1 t_{r+\ell}} & \ldots & e^{ik\mu_m t_{r+\ell}} \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \mu_1^{n_{r+\ell}-1}e^{ik\mu_1 t_{r+\ell}} & \ldots & \mu_m^{n_{r+\ell}-1}e^{ik\mu_m t_{r+\ell}}
\end{array}\right]$$

або у блочному вигляді

$$\Delta(k) = \det \left[\begin{array}{c|c}
\mathbf{W} & \mathbf{V} \\
\hline
\mathbf{M}_1^k & \mathbf{O}_{n_1+\ldots+n_r,m} \\
\hline
\mathbf{O}_{n_{r+1}+\ldots+n_{r+\ell},n} & \mathbf{M}_2^k
\end{array}\right],$$

де $\mathbf{O}_{n,m}$ – нульова матриця розміру $n \times m$,

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;\theta) = \left[\lambda_q^{p-1}\right]_{p=1,\ldots,\theta}^{q=1,\ldots,n},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mu_1,\ldots,\mu_m;\nu_1,\ldots,\nu_m;\theta) = \left[-\nu_p\mu_q^{p-1}\right]_{p=1,\ldots,\theta}^{q=1,\ldots,m},$$

$$\mathbf{M}_1^k = \left[\lambda_s^{q_j-1} e^{i\lambda_s t_j}\right]_{q_j=1,\dots,n_j,\ j=1,\dots,r}^{s=1,\dots,n}, \quad \mathbf{M}_2^k = \left[\mu_s^{q_j-1} e^{i\mu_s t_j}\right]_{q_j=1,\dots,n_j,\ j=r+1,\dots,r+\ell}^{s=1,\dots,m}.$$

При $k = 0$ розв'язком задачі (5)–(7) є многочлени степенів $n-1$ і $m-1$ відповідно:

$$u_0(t) = \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n} C_s(0) t^{s-1}, & t < 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{m} C_{n+s}(0) t^{s-1}, & t > 0, \end{cases}$$

коефіцієнти яких визначаємо із системи, яку отримуємо з умов (6) і (7), а визначник цієї системи має вигляд

$$\Delta(0) = \det\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{I}_\theta & \mathbf{O}_{\theta,n-\theta} & \mathbf{D}_{-\nu_1,\dots,-\nu_\theta} & \mathbf{O}_{\theta,m-\theta} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{M}_1^0} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{O}_{n_1+\dots+n_r,m}} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{O}_{n_{r+1}+\dots+n_{r+\ell},n}} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{M}_2^0} \end{array}\right],$$

де $\mathbf{I}_\theta$ – одинична матриця розміру θ, $\mathbf{D}_{-\nu_1,\dots,-\nu_\theta}$ – діагональна матриця, складена з елементів $-\nu_1,\dots,-\nu_\theta$, а

$$\mathbf{M}_1^0 = \left[A_{s-1}^{q_j-1} t_j^{s-1-q_j+1}\right]_{q_j=1,\dots,n_j,\ j=1,\dots,r}^{s=1,\dots,n},$$

$$\mathbf{M}_2^0 = \left[A_{s-1}^{q_j-1} t_j^{s-1-q_j+1}\right]_{q_j=1,\dots,n_j,\ j=r+1,\dots,r+\ell}^{s=1,\dots,m}.$$

Тут $A_j^s = j!/(j-s)!$, $A_j^s = 0$ при $j > s$.

Якщо виконується умова

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \Delta(k) \neq 0, \tag{10}$$

то, застосовуючи правило Крамера для знаходження розв'язків системи (9) та підставляючи отримані вирази у формули (8), отримуємо, що задача (5)–(7) має єдиний розв'язок, який зображується формулою

$$u_k(t) = \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{r+\ell} \sum\limits_{q_j=1}^{n_j} \dfrac{\Delta_{j,q_j,s}(k)\varphi_{k,j,q_j}}{(ik)^{q_j-1}\Delta(k)} e^{ik\lambda_s t}, & t < 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{m} \sum\limits_{j=0}^{r+\ell} \sum\limits_{q_j=1}^{n_j} \dfrac{\Delta_{j,q_j,n+s}(k)\varphi_{k,j,q_j}}{(ik)^{q_j-1}\Delta(k)} e^{ik\mu_s t}, & t > 0, \end{cases} \qquad k \neq 0. \tag{11}$$

Аналогічно отримуємо

$$u_k(t) = \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{r+\ell} \sum\limits_{q_j=1}^{n_j} \dfrac{\Delta_{j,q_j,s}(0)\varphi_{0,j,q_j}}{\Delta(0)} t^{s-1}, & t < 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{m} \sum\limits_{j=0}^{r+\ell} \sum\limits_{q_j=1}^{n_j} \dfrac{\Delta_{j,q_j,n+s}(0)\varphi_{0,j,q_j}}{\Delta(0)} t^{s-1}, & t > 0, \end{cases} \qquad k = 0. \tag{12}$$

тут $\Delta_{j,q_j,s}$ – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині $(n_0 + n_1 + \ldots + n_{j-1} + q_j)$-го рядка та s-го стовпця у визначнику $\Delta(k)$, якщо $j > 0$; $\Delta_{0,q_j,s}$ – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині q_j-го рядка та s-го стовпця у визначнику $\Delta(k)$.

Таким чином, враховуючи (4), (11) і (12), отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1)–(3):

$$u(t,x)=u_0(t)+\begin{cases}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=0}^{r+\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}\frac{\Delta_{j,q_j,s}(k)\varphi_{k,j,q_j}}{(ik)^{q_j-1}\Delta(k)}e^{i(k\lambda_s t+x)}, & t<0,\\ \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=0}^{r+\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}\frac{\Delta_{j,q_j,n+s}(k)\varphi_{k,j,q_j}}{(ik)^{q_j-1}\Delta(k)}e^{i(k\mu_s t+x)}, & t>0.\end{cases} \tag{13}$$

3. Існування розв'язку. Збіжність ряду (13), взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки величини $\Delta(k)$ як відмінні від нуля можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих k і спричиняти розбіжність рядів у формулі (13).

Теорема 1. *Нехай виконується умова єдиності* (10) *та існують сталі* $C_1>0$ *і* $\omega\in\mathbb{R}$ *такі, що для всіх цілих* k *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)|\ge C_1(1+|k|)^{-\omega}. \tag{14}$$

Якщо

$$\varphi_{j,q_j}\in H_{q+\omega-q_j+1}, \qquad j=0,\ldots,r+\ell, \qquad q_j=1,\ldots,n_j,$$

то існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3). *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* φ_{j,q_j}.

Д о в е д е н н я. Із формул (11) і (12) на підставі нерівностей (14) і нерівності Адамара для визначника $\Delta_{j,q_j,s}(k)$, $k\ne 0$, у якому всі елементи обмежені деякою константою $B>0$:

$$\left|\Delta_{j,q_j,s}(k)\right|\le(n+m-1)^{(n+m-1)/2}B^{n+m-1}, \qquad k\ne 0,$$

отримуємо, що для $k\ne 0$ існують такі додатні сталі C_2 і C_3, що

$$\left|u_k^{(h)}(t)\right|\le\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=0}^{r+\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}\frac{|k\lambda_s|^h\left|\Delta_{j,q_j,s}(k)\right|\left|\varphi_{k,j,q_j}\right|}{|k|^{q_j-1}|\Delta(k)|}\le$$

$$\le C_2(1+|k|)^h\sum_{j=0}^{r+\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}\frac{(1+|k|)^h\varphi_{k,j,q_j}}{(1+|k|)^{-\omega+q_j-1}}, \qquad t<0, \tag{15}$$

$$\left|u_k^{(h)}(t)\right|\le\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=0}^{r+\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}\frac{|k\mu_s|^h\left|\Delta_{j,q_j,s+n}(k)\right|\left|\varphi_{k,j,q_j}\right|}{|k|^{q_j-1}|\Delta(k)|}\le$$

$$\le C_3\sum_{j=0}^{r+\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}\frac{(1+|k|)^h\varphi_{k,j,q_j}}{(1+|k|)^{-\omega+q_j-1}}, \qquad t>0. \tag{16}$$

Із нерівностей (15) і (16) випливає, що для ряду (13) виконуються оцінки

$$\left\|u;C^n([-T,0];H_q)\right\|^2=\sum_{h=0}^{n}\max_{t\in[-T,0]}\left\|\frac{\partial^h u(t,\cdot)}{\partial t^h};H_{q-h}\right\|^2\le$$

$$\le C_4\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{r+\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}(1+|k|)^{2(q+\omega-q_j+1)}\left|\varphi_{k,j,q_j}\right|^2=$$

$$=C_4\sum_{j=0}^{r+\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}\left\|\varphi_{k,j,q_j};H_{q+\omega-q_j+1}\right\|^2,$$

$$\left\| u; C^m([0,T]; H_q) \right\|^2 = \sum_{h=0}^{m} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^h u(t,\cdot)}{\partial t^h}; H_{q-h} \right\|^2 \le$$

$$\le C_5 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{r+\ell} \sum_{q_j=1}^{n_j} (1+|k|)^{2(q+\omega-q_j+1)} \left| \varphi_{k,j,q_j} \right|^2 =$$

$$= C_5 \sum_{j=0}^{r+\ell} \sum_{q_j=1}^{n_j} \left\| \varphi_{k,j,q_j}; H_{q+\omega-q_j+1} \right\|^2 ,$$

де C_4 і C_5 – додатні сталі, які від k не залежать. Із отриманих оцінок випливає твердження теореми. ♦

4. Оцінка малих знаменників. Проаналізуємо умови виконання нерівностей (14). Для цього скористаємось метричним підходом [7], який полягає у вивченні міри множин параметрів задачі, зокрема у розглядуваному випадку – вузлів інтерполяції $t_1,\ldots,t_{r+\ell}$, для яких вказані нерівності виконуються або порушуються. Для оцінювання малих знаменників будемо використовувати допоміжну лему про оцінку міри виняткової множини $\{t\in[a,b]:|Q(t)|<\varepsilon\}$, де функція $Q(t)$ має вигляд квазімногочлена

$$Q(t) \equiv \sum_{j=1}^{m} e^{z_j t} p_j(t), \qquad z_j \ne z_q, \qquad j \ne q ,$$

де $z_1,\ldots,z_m\in\mathbb{C}$, $p_1(t),\ldots,p_m(t)$ – комплекснозначні многочлени степенів $n_1-1,\ldots,n_m-1$ ($n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N}$). Нехай $R(\tau)$ – многочлен степеня n за змінною τ вигляду

$$R(\tau) \equiv \tau^n + \sum_{j=1}^{n} a_j \tau^{n-j}, \qquad a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{C}.$$

Для $R(\tau)$ і $Q(t)$ позначимо

$$A_R = 1 + \max_{1\le j\le n} |a_j|^{1/j}, \qquad M_Q = 1 + \max_{1\le j\le m} |z_j|, \qquad n_0 \equiv n_1 + \ldots + n_m .$$

Лема 1 [3**]**. *Якщо виконується умова*

$$\forall t\in[a,b] \qquad \left| R\left(\frac{d}{dt}\right) Q(t) \right| \ge \delta > 0 ,$$

то для довільного $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{\delta}{2(n+1)A_R^n}\right]$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} \{t\in[a,b] : |Q(t)| < \varepsilon\} \le C_6 M_Q (\varepsilon/\delta)^{1/n} ,$$

де $C_6 = C_6(n, n_0, b-a) > 0$.

Далі через $G^m_{n,q}$ і G^m_n позначимо множини таких наборів (кортежів):

$$G^m_{n,q} = \{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m : q+1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n\} ,$$

$$G^m_n := G^m_{n,0}, \qquad 1 \le m \le n, \qquad n\in\mathbb{N}, \qquad q \in \mathbb{N}\cup\{0\} .$$

Для деякого кортежу $\omega = (i_1,\ldots,i_m) \in G^m_{n,q}$ покладемо

$$\operatorname{set} w = \{i_1,\ldots,i_m\}, \qquad \operatorname{len} w = m, \qquad S_w = i_1 + \ldots + i_m ,$$

$$\rho_j = n_1 + \ldots + n_j, \qquad \rho_{j+1} = \rho_j + n_{j+1}, \qquad j = 1,\ldots,r+\ell ,$$

$$\rho_0 = 0, \qquad \rho_{r+\ell} = m + n - \theta,$$

$$\Lambda_w^\lambda = \sum_{h=1}^{n_j} \lambda_{i_h+\rho_{j-1}}, \qquad w = (i_1, \ldots, i_{n_j}) \in G_{n-\rho_{j-1}}^{n_j},$$

$$\Lambda_w^\mu = \sum_{h=1}^{n_j} \mu_{i_h-n+\rho_{j-1}}, \qquad w = (i_1, \ldots, i_{n_j}) \in G_{n+m-\rho_{j-1}, n-\rho_r}^{n_j}.$$

Позначимо через $w_1, \ldots, w_{r+\ell}$ фіксовані набори вигляду

$$w_j = (1, 2, \ldots, n_j) \in G_{n-\rho_{j-1}}^{n_j}, \qquad j = 1, \ldots, r,$$

$$w_j = (n - \rho_r + 1, n - \rho_r + 2, \ldots, n - \rho_r + n_j) \in G_{m+n-\rho_{j-1}, n-\rho_r}^{n_j},$$

$$j = r + 1, \ldots, r + \ell,$$

через $P_{j,\lambda}$ і $P_{j,\mu}$ – многочлени вигляду

$$P_{j,\lambda}(\tau, ik) = \prod_{w=(i_1,\ldots,i_{n_j})\in G_{n-\rho_{j-1}}^{n_j}\setminus\{w_j\}} (\tau - ik\Lambda_w^\lambda), \qquad j = 1, \ldots, r,$$

$$P_{j,\mu}(\tau, ik) = \prod_{w=(i_1,\ldots,i_{n_j})\in G_{n+m-\rho_{j-1}, n-\rho_r}^{n_j}\setminus\{w_j\}} (\tau - ik\Lambda_w^\mu), \qquad j = r + 1, \ldots, r + \ell,$$

а через $\Delta_{w_{r+\ell}}^{r+\ell}$ – визначник матриці $[\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{V}_1]$, тобто $\Delta_{w_{r+\ell}}^{r+\ell} = \det[\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{V}_1]$, де

$$\mathbf{W}_1 = [\lambda_q^{p-1}]_{p=1,\ldots,\theta}^{q=\rho_r+1,\ldots,n}, \qquad \mathbf{V}_1 = [-\nu_p \mu_q^{p-1}]_{p=1,\ldots,\theta}^{q=\rho_{r+\ell}-\rho_r+1,\ldots,m}.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються такі умови*:

(i) $P_{j,\lambda}(\Lambda_{w_j}^\lambda, 1) \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, r,$

(ii) $P_{j,\mu}(\Lambda_{w_j}^\mu, 1) \neq 0, \qquad j = r + 1, \ldots, r + \ell,$

(iii) $\Delta_{w_{r+\ell}}^{r+\ell} \neq 0$.

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в просторі $\mathbb{R}^{r+\ell}$ *) векторів* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_{r+\ell}) \in [-T, 0]^r \times [0, T]^\ell$ *нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq C_6 (1 + |k|)^{-\omega} \tag{17}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{Z}$ *при*

$$C_6 = \left|\Delta_{w_{r+\ell}}^{r+\ell}\right|, \qquad \omega > \omega_0 = \sum_{j=1}^{r} \deg(P_{j,\lambda}) + \sum_{j=r+1}^{r+\ell} \deg(P_{j,\mu}),$$

де $\omega_0 = \sum_{j=1}^{r} C_{n-\rho_{j-1}}^{n_j} + \sum_{j=r+1}^{r+\ell} C_{m-(\rho_{j-1}-\rho_r)}^{n_j} - (r + \ell)$, C_n^m *– біноміальні коефіцієнти.*

Д о в е д е н н я. Далі будемо розглядати визначник $\Delta(k)$ як функцію змінних $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_{r+\ell})$, $\Delta(k, \mathbf{t}) := \Delta(k)$. Для кожного $k \neq 0$ і деякого $\omega \in \mathbb{R}$ введемо множини

$$E_\omega(k) = \{\mathbf{t} \in [-T, 0]^r \times [0, T]^\ell : |\Delta(k, \mathbf{t})| < C_6 (1 + |k|)^{-\omega}\}, \qquad \omega > 0, \tag{18}$$

і позначимо через E множину тих векторів, які належать до нескінченної кількості множин $E_\omega(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тобто

$$E = \limsup_{|k|\to+\infty} E_\omega(k) = \bigcap_{K=1}^{+\infty} \bigcup_{|k|\ge K} E_\omega(k).$$

Для доведення теореми потрібно довести, що $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}} E = 0$. З огляду на лему Бореля – Кантеллі, для цього достатньо встановити, що для деякого ω збіжним є ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}} E_\omega(k). \tag{19}$$

Щоб встановити збіжність ряду (19), доведемо, що існують сталі $C_7 > 0$ і $\varepsilon > 0$ такі, що для кожного $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}} E_\omega(k) \le C_7\left(1+|k|\right)^{-(1+\varepsilon)}. \tag{20}$$

Позначимо через

$$\Delta_w^j(k) \equiv \Delta_w^j(k, t_{j+1}, \ldots, t_{r+\ell})$$

визначник, який отримуємо з визначника $\Delta(k,\mathbf{t})$ викреслюванням перших ρ_j рядків після θ-го рядка та перших ρ_{j-1} стовбців, а також n_j стовпців, номери яких складають множину $\operatorname{set} w$, $w = (i_1, \ldots, i_{n_j}) \in G_{n,\rho_{j-1}}^{n_j}$, якщо $j = 1, \ldots, r$; якщо ж $j = r+1, \ldots, r+\ell$, то цей визначник отримуємо з визначника $\Delta(k,\mathbf{t})$ викреслюванням перших ρ_j рядків після θ-го рядка та викреслюванням таких стовпців:

– перших ρ_r стовпців,

– перших $n_{r+1} + \ldots + n_{j-1}$ стовпців після n-го стовпця, тобто стовпців із номерами від $n+1$ до $n + n_{r+1} + \ldots + n_{j-1}$,

– n_j стовпців, номери яких складають множину $\operatorname{set} w$, де

$$w = (i_1, \ldots, i_{n_j}) \in G_{m+n,n+(\rho_{j-1}-\rho_r)}^{n_j}.$$

Очевидно, що $\Delta(k,\mathbf{t}) \equiv \Delta_w^0(k, t_1, \ldots, t_{r+\ell})$.

Для кожного значення $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ розглянемо такі множини:

$$\Phi_0(k) = \left\{\mathbf{t} \in [-T,0]^r \times [0,T]^\ell : \left|\Delta_w^0(k,\mathbf{t})\right| < \pi_0(k)\right\},$$

$$\Phi_j(k) = \Big\{\mathbf{t} \in [-T,0]^r \times [0,T]^\ell : \left|\Delta_{w_{j-1}}^{j-1}(k, t_j, \ldots, t_{r+\ell})\right| < \pi_{j-1}(k),$$

$$\left|\Delta_{w_j}^{j}(k, t_j, \ldots, t_{r+\ell})\right| \ge \pi_j(k),\ j = 1, \ldots, r+\ell\Big\},$$

де

$$\pi_{r+\ell}(k) = \left|\Delta_{w_{r+\ell}}^{r+\ell}\right| \ne 0, \qquad \pi_{j-1}(k) = |k|^{-(\chi_j+\varepsilon_j)}\,\pi_j(k), \qquad j = 1, \ldots, r+\ell, \tag{21}$$

$$\chi_j = \begin{cases} \deg(P_{j,\lambda}) = C_{n-\rho_{j-1}}^{n_j} - 1, & j = 1, \ldots, r, \\ \deg(P_{j,\mu}) = C_{m-(\rho_{j-1}-\rho_r)}^{n_j} - 1, & j = r+1, \ldots, r+\ell, \end{cases}$$

$$\varepsilon_j = 2\varepsilon_0 \big/ \big((r+\ell+1)(r+\ell)\big), \qquad j = 1, \ldots, r+\ell, \qquad 0 < \varepsilon_0 < 1. \tag{22}$$

Для знаходження значення $\pi_0(k)$ використаємо рекурентні співвідношення (21) і рівності (22):

$$\pi_0(k) = \left|\Delta^{r+\ell}_{w_{r+\ell}}\right| |k|^{-\left(\sum_{j=1}^{r+\ell}\chi_j + \sum_{j=1}^{r+\ell}\varepsilon_j\right)} = C_6\,|k|^{-(\omega_0+\varepsilon_0)},$$

де

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{r+\ell}\chi_j = \sum_{j=1}^{r} C_n^{n_j} + \sum_{j=r+1}^{r+\ell} C^{n_j}_{m-(\rho_{j-1}-\rho_r)} - (r+\ell).$$

Легко перевірити, що $E_{\omega_0+\varepsilon_0}(k) \subset \Phi_0(k) \subset \bigcup_{j=1}^{r+\ell}\Phi_j(k)$. Тому

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}}\, E_{\omega_0+\varepsilon_0}(k) \le \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}}\, \Phi_0(k) \le \sum_{j=1}^{r+\ell}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}}\, \Phi_j(k). \tag{23}$$

Крім того, за теоремою Фубіні, для кожної з множин $\Phi_j(k)$, $1 \le j \le r+\ell$, маємо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}}\, \Phi_j(k) = \int_{\bar{P}_j} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, \Phi_j(k,\mathbf{t})\,d\mathbf{t} \le T^{r+\ell-1}\,\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, \Phi_j(k,\mathbf{t}), \tag{24}$$

де

$$\mathbf{t}_j = (t_1,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_{r+\ell}), \qquad \Phi_j(k,\mathbf{t}) = \{t_j \in P_j : \mathbf{t}\in\Phi_j(k)\},$$

$$P_q = \begin{cases}[-T,0], & q=1,\dots,r,\\ [0,T], & q=r+1,\dots,r+\ell,\end{cases} \qquad \bar{P}_j = \prod_{q=1,\, q\ne j}^{r+\ell} P_q.$$

Із нерівностей (23) та (24) випливає, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}}\, E_{\omega_0+\varepsilon_0}(k) \le T^{r+\ell-1}\sum_{j=1}^{r+\ell}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, \Phi_j(k,\mathbf{t}). \tag{25}$$

Застосуємо лему 1, щоб оцінити зверху лебеґові міри множин $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, \Phi_j(k,\mathbf{t}_j)$, $j\in\{1,\dots,r+\ell\}$.

За теоремою Лапласа, для $j=1,\dots,r+\ell$ маємо такі розвинення:

$$\Delta^{j-1}_{w_{j-1}}(k,t_j,\dots,t_{r+\ell}) = \sum_{w\in C^{n_j}_{m+n-\rho_{j-1}}} (-1)^{æ_j+S_w}\, W^{\lambda}_w(t_j,k)\Delta^{j}_{w}(k,t_{j+1},\dots,t_{r+\ell}),$$

$$j=1,\dots,r,$$

$$\Delta^{j-1}_{w_{j-1}}(k,t_j,\dots,t_{r+\ell}) = \sum_{w\in C^{n_j}_{m+n-\rho_{j-1}}} (-1)^{æ_j+S_w}\, W^{\mu}_w(t_j,k)\Delta^{j}_{w}(k,t_{j+1},\dots,t_{r+\ell}),$$

$$j=r+1,\dots,r+\ell,$$

де $æ_j = n_j\theta + (n_j+1)n_j/2$,

$$W^{\lambda}_w(t,k) = \det\left\|\lambda^{q-1}_{\rho_{j-1}+i_h} e^{ik\lambda_{\rho_{j-1}+i_h}t}\right\|_{q,h=1}^{n_j} = e^{ikt\Lambda^{\lambda}_w}\Gamma^{\lambda}_w, \qquad w=(i_1,\dots,i_{n_j}),$$

$$W^{\mu}_w(t,k) = \det\left\|\mu^{q-1}_{i_h-n+\rho_{j-1}} e^{ik\mu_{i_h-n+\rho_{j-1}}t}\right\|_{q,h=1}^{n_j} = e^{ikt\Lambda^{\mu}_w}\Gamma^{\mu}_w, \quad w=(i_1,\dots,i_{n_j}),$$

$$\Lambda^{\lambda}_w = \sum_{h=1}^{n_j}\lambda_{i_h+\rho_{j-1}}, \qquad \Lambda^{\mu}_w = \sum_{h=1}^{n_j}\mu_{i_h-n+\rho_{j-1}}, \qquad w=(i_1,\dots,i_{n_j}),$$

$$\Gamma^{\lambda}_w = \det\left\|\lambda^{q-1}_{i_h+\rho_{j-1}}\right\|_{q,h=1}^{n_j}, \qquad \Gamma^{\mu}_w = \det\left\|\mu^{q-1}_{i_h-n+\rho_{j-1}}\right\|_{q,h=1}^{n_j}.$$

Зауважимо, що Γ_w^λ і Γ_w^μ є визначниками Вандермонда, які відмінні від нуля. Кількість підсумовувань у розвиненні визначника $\Delta_{w_{j-1}}^{j-1}(k,t_j,\ldots,t_{r+\ell})$ можна зменшити до $\sum_{w\in C_{n-\rho_{j-1}}^{n_j}}$ для $j=1,\ldots,r$ і до $\sum_{w\in C_{m+n-\rho_{j-1},n-\rho_r}^{n_j}}$ – для $j=r+1,\ldots,r+\ell$, відкинувши ті $W_w^\lambda(t_j,k)$ і $W_w^\mu(t,k)$, які містять принаймні один нульовий стовпець.

Якщо $t_j\in\Phi_j(k,\mathbf{t}_j)$, то, застосувавши відповідні диференціальні вирази, для всіх $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ та $t_j\in P_j$ отримаємо оцінку знизу:

$$\begin{aligned}\left|P_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t_j},ik\right)\Delta_{w_j}^{j-1}(k,t_j,\ldots,t_{r+\ell})\right| &=\\ &=\left|\Gamma_{w_j}^\alpha\right|\left|P_{j,\alpha}(ik\Lambda_{w_j}^\lambda,k)\right|\left|\Delta_{w_j}^{j}(k,t_{j+1},\ldots,t_{r+\ell})\right|\ge\\ &\ge|k|^{\chi_j}\left|\Gamma_{w_j}^\alpha\right|\left|P_{j,\alpha}(\Lambda_{w_j}^\alpha,1)\right|\left|\Delta_{w_j}^{j}(k,t_{j+1},\ldots,t_{r+\ell})\right|\ge\\ &\ge\tilde{c}_j\,|k|^{\chi_j}\,\pi_j(k),\end{aligned}\tag{26}$$

де $\tilde{c}_j=\left|\Gamma_{w_j}^\alpha\right|\left|P_{j,\alpha}(\Lambda_{w_j}^\alpha,1)\right|>0$ за умовами теореми, $\alpha=\begin{cases}\lambda, & j=1,\ldots,r,\\ \mu, & j=r+1,\ldots,r+\ell.\end{cases}$

Зазначимо, що функція $\Delta_{w_j}^{j-1}(k,t_j,\ldots,t_{r+\ell})$, $j=1,\ldots,r+\ell$, як функція змінної t_j (при фіксованих інших точках $t_{j+1},\ldots,t_{r+\ell}$), є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_8T|k|$. Крім того, степінь многочлена $P_{j,\alpha}(\tau,k)$ за змінною τ дорівнює χ_j. Із теореми Вієта випливає, що модуль коефіцієнта при τ^{χ_j-q}, $q=1,\ldots,\chi_j$, у многочленах $P_{j,\lambda}$ і $P_{j,\mu}(\tau,k)$ не перевищує $C_9|k|^q$. Тут C_8 і C_9 – деякі додатні сталі, які не залежать від k. З огляду на лему 1, маємо нерівність

$$0<\frac{\varepsilon}{\delta}=\frac{\pi_{j-1}(k)}{\tilde{c}_j\,|k|^{\chi_j}\,\pi_j(k)}=\frac{1}{\tilde{c}_j\,|k|^{2\chi_j+\varepsilon_j}}\le\frac{1}{2(n+1)A_R^n}=\frac{1}{(2\chi_j+2)(1+|k|)^{\chi_j}},$$

яка буде виконуватись для достатньо великих $|k|$. Тоді, враховуючи оцінку знизу (26), на підставі леми 1 для достатньо великих $|k|$ маємо

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\Phi_j(k,\mathbf{t}_j)&\le C_{10}(1+|k|)\left(\frac{\pi_{j-1}(k)}{c_j\,|k|^{\chi_j}\,\pi_j(k)}\right)^{1/\chi_j}\le C_{11}\left(\frac{\pi_{j-1}(k)}{\pi_j(k)}\right)^{1/\chi_j}=\\ &=C_{11}\left(\frac{1}{|k|^{\chi_j+\varepsilon_j}}\right)^{1/\chi_j}=C_{11}\,|k|^{-(1+\varepsilon_j/\chi_j)}\le C_{11}\,|k|^{-(1+\varepsilon)},\end{aligned}$$

де C_{10} і C_{11} – деякі додатні сталі, які також не залежать від k, $\varepsilon=\min\limits_{j=1,\ldots,r+\ell}\{\varepsilon_j/\chi_j\}$. Із нерівності (25) випливає оцінка для міри множини $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}}E_{w_0+\varepsilon_0}(k)$:

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}}E_{w_0+\varepsilon_0}(k)\le C_{11}(r+\ell)T^{r+\ell-1}\,|k|^{-(1+\varepsilon)},$$

а отже, і збіжність ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^{r+\ell}}E_w(k)$ при $w=w_0+\varepsilon_0$.

Теорему доведено. ♦

Зауваження 1. Якщо $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ та існує число $K > 0$ таке, що оцінка $|\Delta(k)| \geq C_6(1+|k|)^{-\omega}$ виконується для всіх $|k| > K$ і деякого $\omega > \omega_0 > 0$, тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}$ є правильною оцінка

$$|\Delta(k)| \geq C_1(1+|k|)^{-\omega}, \qquad C_1 = \min\{C_6, \min_{|k|\leq K}(1+|k|)^{\omega}\Delta(k)\}.$$

Зауваження 2. Отримані результати можна поширити на випадок однорідних строго гіперболічних рівнянь з багатьма просторовими змінними.

Робота виконана в рамках проекту № 0120U100499 за підтримки бюджетної програми України КПКВК 6541230 «Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень».

1. *Бернік В. І., Бересневіч В. В., Василишин П. Б., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для лінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. − 1999. − **51**, № 10. − С. 1311−1316.
   Те саме: *Bernik V. I., Beresnevich V. V., Vasylyshyn P. B., Ptashnyk B. I.* A multipoint problem with multiple nodes for linear hyperbolic equations // Ukr. Math. J. − 1999. − **51**, No. 10. − P. 1476−1483.
   − https://doi.org/10.1007/BF02981680.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. − Москва: Изд-во АН СССР, 1959. − 164 с.
3. *Бобик І. О., Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними // Вісн. Нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. − 2010. − № 687. − С. 11−19.
4. *Валицкий Ю. Н.* Корректность задачи для дифференциального уравнения при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках // Сиб. мат. журн. − 1996. − **37**, № 2. − С. 251−258.
5. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. − 1959. − **13**, № 3(87). − С. 3−19.
6. *Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. − Ташкент: Фан, 1986. − 220 с.
7. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. − 2006. − **58**, № 12. − С. 1624−1650.
   Те саме: *Il'kiv V. S., Ptashnyk B. I.* Problems for partial differential equations with nonlocal conditions. Metric approach to the problem of small denominators // Ukr. Math. J. − 2006. − **58**, № 12. − P. 1847−1875.
8. *Капустян В. О., Пишнограєв І. О.* Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України «Київ. політехн. ін-т». − 2012. − № 4. − С. 72−76.
9. *Корзюк В. И.* Задача о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // Дифференц. уравнения. − 1968. − **4**, № 10. − С. 1854−1866.
10. *Корзюк В. И.* Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. − Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2013. − 368 с.
11. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з умовою, що містить інтегральний доданок, для параболо-гіперболічного рівняння // Укр. мат. журн. − 2015. − **67**, № 5. − С. 635−644.
    Те саме: *Kuz' A. M., Ptashnyk B. I.* A problem with condition containing an integral term for a parabolic-hyperbolic equation // Ukr. Math. J. − 2015. − **67,** No. 5. − P. 723−734. − https://doi.org/10.1007/s11253-015-1110-4.
12. *Медвідь О. М., Савка І. Я., Тимків І. Р.* Задача спряження з багатоточковими умовами для мішаних рівнянь гіперболічного типу високого порядку // Прикарпат. вісн. НТШ. Число. − 2019. − № 1 (53). − С. 21−28.
    − https://doi.org/10.31471/2304-7399-2019-1(53)-21-28.
13. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. − Київ: Наук. думка, 2002. − 416 с.
14. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними // Укр. мат. журн. − 2003. − **55**, № 3. − С. 400−413.

Те саме: *Ptashnyk B. I., Symotyuk M. M.* Multipoint problem with multiple nodes for partial differential equations // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 3. – P. 481–497. – https://doi.org/10.1023/A:1025881429063.
15. *Савка І., Василишин П., Гой Т.* Задача спряження з нелокальною багатоточковою умовою за часом для параболо-гіперболічного рівняння в циліндричній області // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 229–240.
16. *Стручина Г. М.* Задача о сопряжении двух уравнений // Инж.-физ. журн. – 1961. – **4**, № 11. – С. 99–104.
17. *Уфлянд Я. С.* К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инж.-физ. журн. – 1964. – **7**, № 1. – С. 89–92.
18. *Al-Droubi A., Renardy M.* Energy methods for a parabolic-hyperbolic interface problem arising in electromagnetism // Z. Angew. Math. Phys. – 1988. – **39**, No. 6. – P. 931–936. – https://doi.org/10.1007/BF00945129.
19. *Ashyralyev A., Ozdemir Y.* On numerical solutions for hyperbolic-parabolic equations with the multipoint nonlocal boundary condition // J. Franklin Inst. – 2014. – **351**, No. 2. – P. 602–630. – https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.08.007.
20. *Berdyshev A., Cabada A., Karimov E.* On the existence of eigenvalues of a boundary value problem with transmitting condition of the integral form for a parabolic-hyperbolic equation // Mathematics (MDPI). – 2020. – **8**, No. 6. – Art. 1030. – P. 1–13. – https://doi.org/10.3390/math8061030.
21. *Chen S.* Mixed type equations in gas dynamics // Quart. Appl. Math. – 2010. – **68**, No. 3. – P. 487–511.
22. *Fayazov K. S., Khajiev I. O.* A nonlocal boundary-value problem for a fourth-order mixed-type equation // Укр. мат. вісн. – 2020. – **17**, № 1. – С. 30–40.
Те саме: *Fayazov K. S., Khajiev I. O.* A nonlocal boundary-value problem for a fourth-order mixed-type equation // J. Math. Sci. – 2020. – **248**, No. 2. – P. 166–174. – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04866-2.
23. *Jovanović B. S., Vulkov L. G.* Analysis and numerical approximation of a parabolic-hyperbolic transmission problem // Centr. Eur. J. Math. – 2012. – **10**, No. 1. – P. 73–84. – https://doi.org/10.2478/s11533-011-0114-z.
24. *Milovanović-Jeknić Z.* Parabolic-hyperbolic transmission problem in disjoint domains // Filomat. – 2018. – **32**, No. 20. – P. 6911–6920. – https://doi.org/10.2298/FIL1820911M.
25. *Rassias J. M.* Lecture notes on mixed type partial differential equations. – Singapore, etc.: World Sci., 1990. – 144 p.
26. *Rassias J. M.* Mixed type partial differential equations with initial and boundary values in fluid mechanics // Int. J. Appl. Math. Statist. – 2008. – **13**, No. J08. – P. 77–107.

A PROBLEM OF LINEAR CONJUGATION WITH MULTIPOINT CONDITIONS IN THE CASE OF MULTIPLE NODES FOR HIGHER-ORDER STRICTLY HYPERBOLIC HOMOGENEOUS EQUATIONS

The problem is considered in the cylindrical domain of variables t, x *that is the Cartesian product of the segment containing zero and the unit circle. The domain is divided into two subdomains by the hyperplane* $t = 0$. *In each subdomain, the solution of the problem satisfies the corresponding differential equations with multipoint conditions in the case of multiple nodes, and linear conjugation conditions at the hyperplane* $t = 0$. *The view of the domain imposes additional conditions on the periodicity of the solution with respect to spatial variable* x. *The conditions of the correct solvability of the problem in the Sobolev space are closely related to the problem of small denominators and their estimating. With the help of the metric approach, it is established that such conditions are fulfilled for almost all (with respect to the Lebesgue measure) vectors composed of the interpolation nodes of multipoint conditions.*

***Key words*:** *conjugation problem, multipoint problem, multiple nodes, hyperbolic equation, problem of small denominators, Sobolev space.*

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Івано-Франк. нац. техн. ун-т нафти і газу, Івано-Франківськ

Одержано
17.02.22