

ТЕПЛОВИЙ СТАН ДВОХ КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ШАРІВ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Розв'язано нестационарну задачу теплопровідності для двох контактуючих термочутливих шарів за умов складного теплообміну із зовнішнім середовищем. Розв'язок отримано з використанням аналітично-числового підходу, що ґрунтується на застосуванні варіанту методу послідовних наближень, лінеаризувальних параметрів, інтегрального перетворення Лапласа та його числового обернення за допомогою адаптованої до задач теплопровідності формули Пруднікова. Досліджено тепловий стан такої термочутливої кусково-однорідної структури за різних комбінацій крайових умов на її поверхнях.


Ключові слова: нелінійна задача теплопровідності, термочутливі шари, метод лінеаризувальних параметрів, адаптована формула Пруднікова, метод послідовних наближень.

Дослідження міцності та надійності контактуючих термочутливих елементів конструкцій є актуальними в багатьох галузях техніки та промисловості. Адекватний математичний опис процесів теплопереносу в таких тілах з урахуванням температурної залежності матеріалів, складного теплообміну із зовнішнім середовищем та інших чинників приводить до нелінійних задач теплопровідності. Для їх розв'язування переважно користуються числовими або аналітично-числовими підходами. Як засвідчує огляд сучасних досліджень, найбільше застосовують підходи, що ґрунтуються на використанні методів граничних [15, 18] і скінченних [5, 6] елементів або їхніх комбінацій [4, 13], теорії узагальнених функцій [8, 14], функцій Гріна [12] та інших методів [3, 17]. Кожен з них має як переваги, так і недоліки, що зумовлює розвиток наявних і пошук нових підходів до розв'язування такого класу задач.

Робота є продовженням досліджень щодо застосування аналітично-числового підходу до нелінійних задач теплопровідності для контактуючих термочутливих тіл, який ґрунтується на використанні методів лінеаризувальних параметрів і послідовних наближень для лінеаризації вихідної задачі, а також адаптованої формули Пруднікова для числового обернення перетворення Лапласа. Алгоритм цього підходу та ефективність його застосування при визначенні теплового та термонапруженого станів контактуючих термочутливих тіл наведено, зокрема, у працях [1, 2].

У цій статті розв'язано нелінійну задачу теплопровідності для термочутливих контактуючих шарів за складного теплообміну. Особливістю розглянутої задачі є врахування нелінійності, отриманої з крайової умови другого роду, тобто нелінійними у вихідній задачі є як рівняння теплопровідності, так і умови конвективно-променевого теплообміну з оточуючими середовищами через поверхні шарів. Перевірку достовірності отриманих результатів проведено для часткових випадків, коли на поверхнях шарів задано сталі температури. Досліджено розподіли температур шарів, виготовлених із титанового сплаву та окису цирконію за різних комбінацій крайових умов.

1. Формулювання задачі теплопровідності. Визначимо нестационарні температурні поля t_1 , t_2 ідеально контактуючих термочутливих шарів $0 < z < z_1$ і $-z_2 < z < 0$ за однакового початкового розподілу температури t_p та складного теплообміну із середовищами сталих температур t_{c1} та t_{c2} відповідно.

 dept19@iapmm.lviv.ua

За таких умов нестационарні температурні поля шарів визначаємо з рівнянь теплопровідності

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}\right) &= c_v^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial \tau}, & 0 < z < z_1, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z}\right) &= c_v^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial \tau}, & -z_2 < z < 0,\end{aligned}\quad (1)$$

за початкових умов

$$t_j|_{\tau=0} = t_p, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

крайових умов

$$\left\{\lambda_t(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z} + \alpha_1(t_1 - t_{c1}) + \sigma\varepsilon_1(t_1^4 - t_{c1}^4)\right\}\Big|_{z=z_1} = 0, \quad (3)$$

$$\left\{\lambda_t(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z} - \alpha_2(t_2 - t_{c2}) - \sigma\varepsilon_2(t_2^4 - t_{c2}^4)\right\}\Big|_{z=-z_2} = 0 \quad (4)$$

і контактних умов

$$t_1|_{z=0} = t_2|_{z=0}, \quad \left[\lambda_t^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}\right]\Big|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

де α_j – коефіцієнт теплообміну і ε_j – ступінь чорноти поверхні j -го шару; $\lambda_t^{(j)}(t_j)$, $c_v^{(j)}(t_j)$ – коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів шарів, $j = 1, 2$; σ – стала Стефана–Больцмана.

2. Побудова розв'язку задачі теплопровідності. Згідно з алгоритмом запропонованого та апробованого в роботах [1, 2] аналітично-числового підходу, розв'язування задачі теплопровідності складається з таких кроків.

1°. Зведення вихідної задачі до безрозмірного вигляду. Для цього вибираємо відлікове значення температури t_0 , характерний розмір z_1 (товщина

верхнього шару), вводимо безрозмірні температури $T_j = \frac{t_j}{t_0}$, координату

$\bar{z} = \frac{z}{z_1}$ і записуємо характеристики матеріалів у вигляді $\chi(t) = \chi_0\chi^*(T)$, де

χ_0 – розмірна її складова, а $\chi^*(T)$ – безрозмірна функція, що описує характер зміни відповідної характеристики від безрозмірної температури. В результаті введення безрозмірних величин задача (1)–(5) набуде вигляду

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\lambda_t^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}}\right) &= c_v^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial Fo}, & 0 < \bar{z} < 1, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\lambda_t^{(2)*}(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}}\right) &= c_v^{(2)*}(T_2)K_a\frac{\partial T_2}{\partial Fo}, & -\bar{z}_2 < \bar{z} < 0,\end{aligned}\quad (6)$$

$$T_j|_{Fo=0} = T_p, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

$$\left[\lambda_t^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} + Bi_1(T_1 - T_{c1}) + Sk_1(T_1^4 - T_{c1}^4)\right]\Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (8)$$

$$\left[\lambda_t^{(2)*}(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} - Bi_2(T_2 - T_{c2}) - Sk_2(T_2^4 - T_{c2}^4)\right]\Big|_{\bar{z}=-\bar{z}_2} = 0, \quad (9)$$

$$T_1|_{\bar{z}=0} = T_2|_{\bar{z}=0}, \quad \left[K_\lambda \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} - \lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} \right]_{\bar{z}=0} = 0, \quad (10)$$

$$\text{де } \bar{z} = \frac{z}{z_1}, \quad \bar{z}_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad T_i = \frac{t_i}{t_0}, \quad T_p = \frac{t_p}{t_0}, \quad \text{Fo} = \frac{a_0^{(1)} \tau}{z_1^2}, \quad a_0^{(j)} = \frac{\lambda_{t0}^{(j)}}{c_{v0}^{(j)}}, \quad K_a = \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(2)}},$$

$$K_\lambda = \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(1)}}, \quad \text{Bi}_j = \frac{\alpha_j}{\lambda_{t0}^{(j)}} z_1, \quad \text{Sk}_j = \frac{\sigma \varepsilon_j t_0^3}{\lambda_{t0}^{(j)}}, \quad j = 1, 2.$$

2°. *Лінеаризація задачі.* Проводимо лінеаризацію в два етапи: спочатку застосовуємо перетворення Кірхгофа, а потім до отриманої задачі відносно змінних Кірхгофа – метод послідовних наближень і метод лінеаризувальних параметрів.

Отже, застосуємо до задачі (6)–(10) інтегральне перетворення Кірхгофа

$$\theta_j = \int_{T_p}^{T_j} \lambda_t^{(j)*}(T) dT, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Внаслідок цього отримаємо таку частково лінеаризовану крайову задачу стосовно змінних θ_j :

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \bar{z}^2} = a_1^*(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \text{Fo}}, \quad 0 < \bar{z} < 1,$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{z}^2} = K_a a_2^*(\theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial \text{Fo}}, \quad -\bar{z}_2 < \bar{z} < 0, \quad (12)$$

$$\theta_j|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}_1(T_1(\theta_1) - T_{c1}) + \text{Sk}_1(T_1^4(\theta_1) - T_{c1}^4) \right]_{\bar{z}=1} = 0, \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} - \text{Bi}_2(T_2(\theta_2) - T_{c2}) - \text{Sk}_2(T_2^4(\theta_2) - T_{c2}^4) \right]_{\bar{z}=-\bar{z}_2} = 0, \quad (15)$$

$$T_1(\theta_1)|_{\bar{z}=0} = T_2(\theta_2)|_{\bar{z}=0}, \quad \left[K_\lambda \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} \right]_{\bar{z}=0} = 0, \quad (16)$$

$$\text{де } a_j^*(T_j(\theta_j)) = c_v^{(j)*}(T_j(\theta_j)) / \lambda_t^{(j)*}(T_j(\theta_j)), \quad j = 1, 2.$$

Зауважимо, що у випадку матеріалів з простою нелінійністю, коли відношення залежних від температури теплових характеристик матеріалів є сталою величиною, рівняння (12) лінеаризувались би повністю, а для лінеаризації крайових умов (14), (15) довелось би ввести три лінеаризувальні параметри. Використання запропонованого в працях [9, 10] варіанта методу послідовних наближень дозволяє лінеаризувати рівняння (12), крайові умови (14), (15) і зменшити кількість лінеаризувальних параметрів до одного, ввівши його в першій з умов (16), записавши її у вигляді

$$\theta_1|_{\bar{z}=0} = (1 + \alpha) \theta_2|_{\bar{z}=0},$$

де α – невідомий лінеаризувальний параметр.

Запропонований варіант методу послідовних наближень полягає у розв'язуванні з наперед заданою точністю послідовності лінійних крайових задач з уточненими на попередніх кроках деякими величинами.

За m -те, $m = 1, 2, \dots$, наближення розв'язку виберемо розв'язок такої лінійної задачі спряження:

$$\frac{\partial^2 \theta_{1,m}}{\partial \bar{z}^2} = K_{m-1}^{(1)} \frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \text{Fo}}, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{2,m}}{\partial \bar{z}^2} = K_{m-1}^{(2)} \frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \text{Fo}}, \quad -\bar{z}_2 < \bar{z} < 0, \quad (17)$$

$$\theta_{j,m} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (18)$$

$$\left[\frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \rho} + \text{Bi}_{1,m} (\theta_{1,m} - \theta_{c1}) \right] \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (19)$$

$$\left[\frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \rho} - \text{Bi}_{2,m} (\theta_{2,m} - \theta_{c2}) \right] \Big|_{\bar{z}=-\bar{z}_2} = 0, \quad (20)$$

$$\theta_{1,m} \Big|_{\bar{z}=0} = (1 + \alpha) \theta_{2,m} \Big|_{\bar{z}=0}, \quad \left[K_\lambda \frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = 0, \quad (21)$$

де

$$K_{m-1}^{(1)} = a_1^* (T_{1,m-1}(\theta_{1,m-1})), \quad K_{m-1}^{(2)} = K_a a_2^* (T_{2,m-1}(\theta_{2,m-1})),$$

$$\text{Bi}_{1,m} = [\theta_{1,m-1}(\text{Fo}^*, 1) - \theta_{c1}]^{-1} \{ \text{Bi}_1 [T(\theta_{1,m-1}(\text{Fo}^*, 1)) - T_{c1}] + \\ + \text{Sk}_1 [(T(\theta_{1,m-1}(\text{Fo}^*, 1)))^4 - T_{c1}^4] \},$$

$$\text{Bi}_{2,m} = [\theta_{2,m-1}(\text{Fo}^*, -\bar{z}_2) - \theta_{c2}]^{-1} \{ \text{Bi}_2 [T(\theta_{2,m-1}(\text{Fo}^*, -\bar{z}_2)) - T_{c2}] + \\ + \text{Sk}_2 [(T(\theta_{2,m-1}(\text{Fo}^*, -\bar{z}_2)))^4 - T_{c2}^4] \}, \quad m \geq 2,$$

$$\theta_{cj} = \int_{T_p}^{T_{cj}} \lambda_t^{j*}(T) dT, \quad j = 1, 2.$$

За початкове наближення вибираємо розв'язок задачі відносно змінних Кірхгофа, коли $K_1^{(1)} = 1$, $K_1^{(2)} = K_a$, $\text{Bi}_{1,1} = \text{Bi}_1$, $\text{Bi}_{2,1} = \text{Bi}_2$ (тобто враховуємо лише конвективний теплообмін).

3°. Застосування інтегрального перетворення Лапласа за часом. Застосувавши до лінеаризованої задачі (17)–(21) перетворення $\tilde{\theta}_{j,m} = \int_0^\infty \theta_{j,m} e^{-s\text{Fo}} d\text{Fo}$ (де s – параметр перетворення Лапласа), отримуємо за-

дачу стосовно трансформант змінних Кірхгофа $\tilde{\theta}_{j,m}$:

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{1,m}}{d\bar{z}^2} = s K_{m-1}^{(1)} \tilde{\theta}_{1,m}, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{2,m}}{d\bar{z}^2} = s K_{m-1}^{(2)} \tilde{\theta}_{2,m}, \quad -\bar{z}_2 < \bar{z} < 0, \quad (22)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{\theta}_{1,m}}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}_{1,m} \left(\tilde{\theta}_{1,m} - \frac{\theta_{c1}}{s} \right) \right] \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (23)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{\theta}_{2,m}}{\partial \bar{z}} - \text{Bi}_{2,m} \left(\tilde{\theta}_{2,m} - \frac{\theta_{c2}}{s} \right) \right] \Big|_{\bar{z}=-\bar{z}_2} = 0, \quad (24)$$

$$\tilde{\theta}_{1,m} \Big|_{\bar{z}=0} = (1 + \varkappa) \tilde{\theta}_{2,m} \Big|_{\bar{z}=0}, \quad \left[K_\lambda \frac{\partial \tilde{\theta}_{2,m}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tilde{\theta}_{1,m}}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = 0. \quad (25)$$

Загальний розв'язок рівнянь (22) має вигляд

$$\tilde{\theta}_{j,m} = C_{1,m}^j e^{\bar{z} \sqrt{sK_{m-1}^{(j)}}} + C_{2,m}^j e^{-\bar{z} \sqrt{sK_{m-1}^{(j)}}}, \quad j = \begin{cases} 1, & 0 < \bar{z} < 1, \\ 2, & -\bar{z}_2 < \bar{z} < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Підставивши (26) у крайові умови (23)–(25), отримаємо систему рівнянь для визначення сталих інтегрування $C_{1,m}^j, C_{2,m}^j, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} C_{1,m}^1 \sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} - C_{2,m}^1 \sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} + \\ + \text{Bi}_{1,m} \left(C_{1,m}^1 e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} + C_{2,m}^1 e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} - \frac{\theta_{c1}}{s} \right) = 0, \\ C_{1,m}^2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} e^{-\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} - C_{2,m}^2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} e^{\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} - \\ - \text{Bi}_{2,m} \left(C_{1,m}^2 e^{-\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} + C_{2,m}^2 e^{\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} - \frac{\theta_{c2}}{s} \right) = 0, \\ C_{1,m}^1 + C_{2,m}^1 = (1 + \varkappa)(C_{1,m}^2 + C_{2,m}^2), \\ K_\lambda \left(C_{1,m}^2 \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} - C_{2,m}^2 \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} \right) = C_{1,m}^1 \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} - C_{2,m}^1 \sqrt{K_{m-1}^{(1)}}, \end{aligned}$$

звідки отримуємо для них такі вирази:

$$\begin{aligned} C_{1,m}^1 &= \left[\text{Bi}_{2,m} V_6 \frac{\theta_{c2}}{sV_2} + V_5 C_{1,m}^2 \right] \frac{1}{\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}}, \\ C_{2,m}^1 &= \left[\text{Bi}_{1,m} \frac{\theta_{c1}}{s} - V_3 C_{1,m}^1 \right] \frac{1}{V_4}, \\ C_{1,m}^2 &= \left[-\text{Bi}_{2,m} \frac{\theta_{c2}}{sV_2} \left(\frac{1}{2} V_6 \left(1 + \frac{V_3}{V_4} \right) + K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} \right) + \frac{\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}}{sV_4} \text{Bi}_{1,m} \theta_{c2} \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} \left(V_5 + \frac{V_3 V_5}{V_4} \right) - K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \right) \right]^{-1}, \\ C_{2,m}^2 &= \left[\text{Bi}_{2,m} \frac{\theta_{c2}}{s} + V_1 C_{1,m}^2 \right] \frac{1}{V_2}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} V_1 &= e^{-\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \left(\sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} - \text{Bi}_{2,m} \right), \quad V_2 = e^{\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \left(\sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} + \text{Bi}_{2,m} \right), \\ V_3 &= e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \left(\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} + \text{Bi}_{1,m} \right), \quad V_4 = e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \left(-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} + \text{Bi}_{1,m} \right), \\ V_5 &= (1 + \varkappa) \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} \left(1 + \frac{V_1}{V_2} \right) + K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \right), \\ V_6 &= (1 + \varkappa) \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} - K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}}. \end{aligned}$$

4°. Чисельно-аналітичне обернення перетворення Лапласа за формулою Пруднікова. За отриманими трансформантами оригінали змінних Кірхгофа визначаємо за адаптованою до розглядуваного класу задач формулою Пруднікова [1, 7, 16].

5°. Обчислення температури. За відомими змінними Кірхгофа для конкретних залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури оберненням перетворення Кірхгофа визначаємо температуру в шарах. Коли коефіцієнти теплопровідності лінійно залежать від температури ($\lambda_t^{(j)*}(T_j) = 1 + k_j(T_j - T_p)$), формули для обчислення просторово-часових розподілів температур у шарах мають вигляд

$$T_{j,m}(Fo, \bar{z}, \alpha) = k_j^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k_j \theta_{j,m}(Fo, \bar{z}, \alpha)} - 1 \right) + T_p, \quad k_j = \text{const.}$$

6°. Визначення невідомого лінеаризувального параметра α . Параметр α визначаємо з умови рівності температур на межі контакту:

$$[T_{1,m}(\alpha) - T_{2,m}(\alpha)]|_{\bar{z}=0} = 0.$$

Отримане нелінійне алгебричне рівняння розв'язуємо чисельно ітераційним методом Ньютона:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{F_m(\alpha_{n-1})}{F'_m(\alpha_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \alpha_0 = 0,$$

де

$$F_m(\alpha) = [T_{1,m} - T_{2,m}]|_{\bar{z}=0}, \quad F'_m(\alpha) = [T'_{1,m} - T'_{2,m}]|_{\bar{z}=0}.$$

3. Числові дослідження. Для досліджень за матеріали шарів вибрано титановий сплав та окис цирконію, теплофізичні характеристики яких наведено в праці [19], а їх подання у вигляді добутку розмірної величини на безрозмірну функцію – в роботі [11]. Зауважимо, що температурні залежності зазначених характеристик відповідають температурному діапазону 300÷1100 К.

Перевірку достовірності отриманих результатів проведено в частковому випадку, коли на поверхнях шарів задано сталі температури. Результати порівняння отриманих наближених розв'язків із заданими на поверхнях значеннями температур за оптимально вибраних параметрів ℓ , s (див. [2, 7, 16]) наведено в табл. 1, табл. 2. У цьому випадку сталі інтегрування, отримані з відповідних крайових умов, мають вигляд

$$\begin{aligned} C_{1,m}^1 &= \left[B + \frac{A}{D} \left(\frac{\theta_{c2}}{s} K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} - \frac{\theta_{c1}}{s} \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} e^{\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}} e^{\bar{z}_2 \sqrt{K_{m-1}^{(2)}}} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[2\sqrt{K_{m-1}^{(1)}} - \frac{A}{D} \left(\sqrt{K_{m-1}^{(1)}} e^{\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} \left(1 + e^{2\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \right) \right) \right]^{-1}, \\ C_{2,m}^1 &= \left[\frac{\theta_{c1}}{s} - C_{1,m}^1 e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \right] e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}}, \\ C_{1,m}^2 &= \left[\frac{\theta_{c2}}{s} K_\lambda \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} + \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} e^{\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} \right] \times \\ &\quad \times \left(C_{1,m}^1 \left(1 + e^{2\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \right) - \frac{\theta_{c1}}{s} e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \right) D^{-1}, \\ C_{2,m}^2 &= \left[\frac{\theta_{c2}}{s} - C_{1,m}^2 e^{-\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} \right] e^{-\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}}, \end{aligned}$$

де

$$A = \sqrt{K_{m-1}^{(1)}}(1 + \alpha) \left(1 + e^{-2\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} \right) + K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} \left(1 - e^{-2\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} \right),$$

$$B = \frac{\theta c_2}{s} \left(\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}(1 + \alpha) - K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} \right) e^{-\bar{z}_2 \sqrt{K_{m-1}^{(2)} s}},$$

$$D = K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} \left(e^{-\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} + e^{\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} \right).$$

Результати обчислень, подані в табл. 1, виконано для різних моментів часу Fo за безрозмірних значень температури $T_{c1} = 1$ на верхній межі, $\bar{z} = 1$, та $T_{c2} = 0.5$ - на нижній, $\bar{z} = -\bar{z}_2$, а в табл. 2 - для значень $T_{c1} = 0.8$, $T_{c2} = 0.3$, відповідно. Зауважимо, що вплив вибору параметрів ℓ , s (у формулах обернення перетворення Лапласа) проаналізовано в працях [2, 7, 16], а для розглянутої тут задачі розбіжностей з отриманими там результатами не виявлено. Максимальна похибка між отриманими наближеними значеннями температури і заданими на поверхнях не перевищує 1%.

Таблиця 1

Fo	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.	1.5
T_1^{ap}	0.9876	0.9888	0.9894	1.001	0.9975	0.9939	1.005
T_2^{ap}	0.497	0.498	0.499	0.4975	0.502	0.4986	0.504

Таблиця 2

Fo	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.	1.5
T_1^{ap}	0.7984	0.7991	0.8002	0.7987	0.7992	0.8001	0.7995
T_2^{ap}	0.298	0.299	0.2976	0.2979	0.3004	0.3001	0.2989

Обчислення температурних полів виконано для випадку, коли шар $0 < \bar{z} < 1$ виготовлено з окису цирконію, а шар $-\bar{z}_2 < \bar{z} < 0$ - з титанового сплаву. Розподіли температури у шарах за різних комбінацій крайових умов (критеріїв Біо і Старка) наведено на рис. 1 та рис. 2.

На рис. 1 зображено графіки залежностей від координати \bar{z} розподілів температури T у шарах в різні моменти часу за складного теплообміну через обидві поверхні. Кривій 1 відповідають такі значення: $Bi_1 = Bi_2 = 0.1$, $Sk_1 = Sk_2 = 0$, $Fo = 0.1$; кривій 2 - значення $Bi_1 = 0.5$, $Bi_2 = 0.2$, $Sk_1 = Sk_2 = 0$, $Fo = 0.1$; кривим 3-5 - значення $Bi_1 = 0.5$, $Bi_2 = 0.2$, $Sk_1 = 0.1$, $Sk_2 = 0.2$ у моменти часу $Fo = 0.1, 0.3, 0.4$ відповідно.

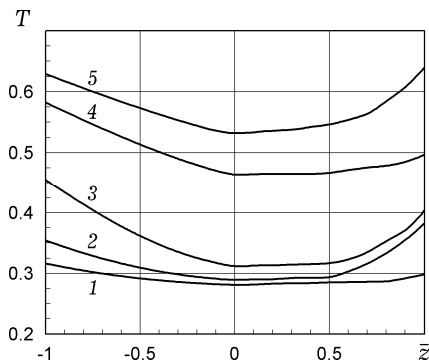


Рис. 1

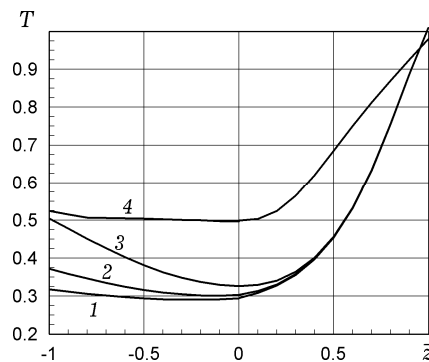


Рис. 2

На рис. 2 зображено графіки залежності температури від координати \bar{z} , коли на межі $\bar{z} = 1$ задано сталу температуру, а через поверхню $\bar{z} = -\bar{z}_2$ відбувається складний теплообмін з середовищем за різних комбінацій критеріїв Біо та Старка. Криві 1–4 відповідають таким значенням: 1 – $Bi_2 = 0.1$, $Sk_2 = 0$, $Fo = 0.1$; 2 – $Bi_2 = 0.1$, $Sk_2 = 0.1$, $Fo = 0.1$; 3 – $Bi_2 = 0.4$, $Sk_2 = 0.2$, $Fo = 0.1$; 4 – $Bi_2 = 0.1$, $Sk_2 = 0.1$, $Fo = 0.4$.

Зазначимо, що при проведенні числових досліджень зафіксовано швидку збіжність ітераційного процесу, при цьому максимальна кількість ітерацій не перевищувала $M = 45$ і спостерігалася на поверхнях розглянутої кусково-однорідної структури при $\bar{z} = 1$ та $\bar{z} = -\bar{z}_2$. Отримані результати відповідають фізично очікуванім: розподіли температур у шарах залежать від значень відповідних критеріїв Біо та Старка, заданих на кожній з поверхонь. За однакових значень цих критеріїв і однакової температури зовнішнього середовища ($T_{c1} = T_{c2}$) швидкість прогрівання шарів залежить від коефіцієнтів теплопровідності матеріалів. Шар $-\bar{z}_2 < \bar{z} < 0$, виготовлений з титанового сплаву з більшим коефіцієнтом теплопровідності, прогривається швидше, ніж шар $0 < \bar{z} < 1$, виготовлений з окису цирконію (крива 4 на рис. 1).

Висновки. Апробований на низці задач теплопровідності для напівбезмежних термочутливих кусково-однорідних тіл аналітично-числовий підхід поширено на аналогічні задачі для обмежених тіл. Застосування варіанта методу послідовних наближень і лінеаризувальних параметрів дозволило лінеаризувати вихідну задачу та розв'язати її з використанням перетворення Лапласа та його обернення за адаптованою формулою Пруднікова. Достовірність отриманих наближених розв'язків перевірено для часткових випадків, коли на одній або двох поверхнях задано сталі розподіли температури.

Досліджено залежність розподілу температури від товщинної координати для кусково-однорідної структури, виготовленої з титанового сплаву та окису цирконію, за різних комбінацій крайових умов на її поверхнях у різні моменти часу. Числові дослідження підтвердили ефективність застосування запропонованого підходу до нелінійних задач теплопровідності контактуючих термочутливих тіл. Надалі отримані результати будуть використані для дослідження термопружного стану таких кусково-однорідних структур.

1. *Вовк О. М.* Використання числового обернення перетворення Лапласа в задачах теплопровідності контактуючих термочутливих тіл // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 124–131.
2. *Вовк О. М., Соляр Т. Я.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпростору та шару за складного теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 113–122.
Te same: *Vovk O. M., Solyar T. Ya.* Thermoelastic state of a thermosensitive half space and a thermosensitive layer in contact under the conditions of complex heat exchange // J. Math. Sci. – 2023. – **273**, No. 1. – P. 132–143. – <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06489-9>.
3. *Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М.* Вплив термочутливості матеріалів на термопружний стан тришарового порожнистого циліндра за конвективного теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2022. – **58**, № 3. – С. 97–104.
Te same: *Harmatiy G. Y., Kalynyak B. M.* Influence of thermal sensitivity of materials on the thermal stressed state of a three-layer hollow cylinder under the conditions of convective heat exchange // Mater. Sci. – 2022. – **58**, No. 3. – P. 385–394. – <https://doi.org/10.1007/s11003-023-00675-5>.
4. *Гудзь Р. В., Журавчак Л. М., Петльований А. Т.* Розв'язування плоскої статичної задачі термопружності для локально-неоднорідного тіла поєднанням методів граничних, приграничних та скінченних елементів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 2. – С. 148–156.

5. Коваленко Я. П., Бойко І. А., Мельничук П. П. Застосування методу скінчених елементів для пошуку шляхів оптимізації температурного поля при різанні інструментами із ПКНБ групи BL // Техн. інженерія. – 2022. – № 2 (90). – С. 22–29. – [https://doi.org/10.26642/ten-2022-2\(90\)-22-29](https://doi.org/10.26642/ten-2022-2(90)-22-29).
6. Козуб Г. О., Козуб Ю. Г. Моделювання теплових процесів у шаруватих тілах // Геотехн. механіка. – 2020. – Вип. 151. – С. 234–244. – <https://doi.org/10.15407/geotm2020.151.234>.
7. Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 2. – С. 18–26.
Te same: *Kushnir R. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperatures with the help of improved formulas of the inverse Laplace transformation // *Mater. Sci.* – 2002. – **38**, No. 2. – P. 172–184. – <https://doi.org/10.1023/A:1020929818010>.
8. Кушнір Р. М., Махоркін І. М., Махоркін М. І. Аналітично-числове визначення статичного термопружного стану плоских багатошарових термочутливих структур // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 4. – С. 131–140.
Te same: *Kushnir R. M., Makhorkin I. M., Makhorkin M. I.* Numerical-analytic determination of the static thermoelastic state of plane multilayer thermosensitive structures // *J. Math. Sci.* – 2022. – **265**, No. 3. – P. 498–511. – <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06067-5>.
9. Попович В. С., Вовк О. М., Гарматій Г. Ю. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 4. – С. 151–158.
Te same: *Popovych V. S., Vovk O. M., Harmatii H. Yu.* Investigation of the static thermoelastic state of a thermosensitive hollow cylinder under convective-radiant heat exchange with environment // *J. Math. Sci.* – 2012. – **187**, No. 6. – P. 726–736. – <https://doi.org/10.1007/s10958-012-1097-4>.
10. Попович В., Вовк О. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого нескінченного шару за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 146–155.
11. Попович В., Вовк О. Дослідження термопружного стану контактуючих термочутливих півпросторів з тепловиділеннями на межі дотику // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2014. – № 2 (74). – С. 38–47.
12. Процюк Б. В. Нестационарні задачі теплопровідності для термочутливої плити за нелінійної граничної умови на одній із поверхонь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 2. – С. 117–128.
Te same: *Protsiuk B. V.* Nonstationary problems of heat conduction for a thermosensitive plate with nonlinear boundary condition on one surface // *J. Math. Sci.* – 2023. – **272**, No. 1. – P. 135–150. – <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06405-1>.
13. Савула Я., Стягар А. Числовий аналіз двовимірної задачі про напружений стан неоднорідного тіла з урахуванням геометричної нелінійності // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2015. – Вип. 21. – С. 198–204.
14. Шевчук В. А. Методологія дослідження термонапруженого стану тіл із тонкими багатошаровими покриттями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 3. – С. 41–54.
15. Fahmy M. A. A new boundary element algorithm for modeling and simulation of nonlinear thermal stresses in micropolar FGA composites with temperature-dependent properties // *Adv. Model. Simul. Eng. Sci.* – 2021. – **8**(1). – P. 1–23. – <https://doi.org/10.1186/s40323-021-00193-6>.
16. Kushnir R., Solyar T. A numerical-analytical approach to the analysis of nonstationary temperature fields in multiply-connected solids // *Mech., Mater. Sci. & Eng. J.* – 2016. – **3**. – P. 90–106. – Doi 10.13140/RG.2.1.1167.0165.
17. Srinivas V. B., Manthana V. R., Bikram J., Kedar G. D. Fractional order heat conduction and thermoelastic response of a thermally sensitive rectangular parallelepiped // *Int. J. Thermodyn.* – 2021. – **24**, No. 1. – P. 62–73. – <https://doi.org/10.5541/ijot.849663>.
18. Sulym H., Vasylyshyn A., Pasternak Ia. Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagnetoelastic bimaterial solids on interaction of thin deformable inclusions // *Acta mechanica et automatica.* – 2022. – **16**, No. 3. – P. 242–249. – <https://doi.org/10.2478/ama-2022-0029>.

19. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102. – <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.

THERMAL STATE OF TWO CONTACTING THERMOSENSITIVE LAYERS UNDER COMPLEX HEAT EXCHANGE

The nonstationary problem of heat conduction for two contacting thermosensitive layers under the conditions of complex heat exchange with the ambient medium is solved. The solution is obtained using an analytical-numerical approach based on the application of a variant of the method of successive approximations, linearizing parameters, the Laplace integral transformation and its numerical inversion using the Prudnikov formula adapted to heat conduction problems. The thermal state of such a thermosensitive piecewise-homogeneous structure under various combinations of boundary conditions on its surfaces is investigated.

Key words: *nonlinear heat conduction problem, thermosensitive layers, method of linearizing parameters, adapted Prudnikov formula, method of successive approximations.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
27.11.22