УДК 517.956.4

І. П. Мединський [✉]

ПРО КЛАСИЧНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Наведено результати побудови і дослідження класичного фундаментального розв'язку задачі Коші для класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$ -параболічною головною частиною за основними змінними і двома групами просторових змінних виродження та коефіцієнтами, залежними від усіх змінних. Отримано оцінки класичного фундаментального розв'язку і його похідних.

Ключові слова: *вироджене параболічне рівняння типу Колмогорова, метод параметриксу Леві, об'ємний потенціал, $\overrightarrow{2b}$ –параболічна головна частина за основними змінними, фундаментальний розв'язок задачі Коші.*

Вступ. У 1998 році С. Д. Ейдельман та С. Д. Івасишен у працях [1, 2] означили й почали досліджувати новий клас параболічних рівнянь − клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$ -параболічною головною частиною за основними змінними (клас $\mathbf{E}_{23}$, згідно з термінологією монографії [10]). У цих рівняннях узагальнюються означення $\overrightarrow{2b}$ -параболічності та структура рівнянь типу Колмогорова. Крім того, такі рівняння можуть бути й псевдодиференціальними.

У монографії [10] автори, модифікувавши відповідним чином поняття B -гельдеровості S. Polidoro [12], для рівнянь із класів $\mathbf{E}_{21}$, $\mathbf{E}_{22}$ і $\mathbf{E}_{23}$ знайшли умови, за яких побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) у некласичному сенсі, отримано відповідні оцінки і за їх допомогою доведено теореми про коректну розв'язність задачі Коші. У працях [3−9] для вироджених параболічних рівнянь із класів $\mathbf{E}_{21}$ і $\mathbf{E}_{22}$ встановлено умови на коефіцієнти рівнянь і розроблено нову модифікацію методу Леві [11], яку застосовано до побудови класичного ФРЗК Z і отримання точних оцінок функції Z і її похідних. Тому природним є бажання одержати аналогічні результати для рівнянь із класу $\mathbf{E}_{23}$. Цьому й присвячена стаття.

Зауважимо, що при застосуванні методу параметриксу Леві до рівнянь із класу $\mathbf{E}_{23}$ виникають оцінювальні функції у вигляді сум спеціальних рядів. Ці функції мають структуру і властивості, подібні до відповідних функцій з праці [8] для випадку рівнянь довільного порядку.

1. Позначення і припущення. Нехай n, n_1, n_2 і n_3 − задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; $\mathbb{N}_j := \{1,\dots,j\}$, $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$; $\overrightarrow{2b} := (2b_1,\dots,2b_{n_1})$, $q_j := 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$; b − найменше спільне кратне чисел $b_1,\dots,b_{n_1}$; $m_j := b/b_j$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де компоненти $x_j := (x_{j1},\dots,x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$, то $k := (k_1, k_2, k_3)$ і $k_j := (k_{j1},\dots,k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, при цьому $\|k_1\| := m_1 k_{11} + \dots + m_{n_1} k_{1n_1}$, $M := \sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s} \frac{2b(s-1) + m_j}{2b}$, $M_k := \sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s} \frac{(2b(s-1) + m_j)k_{sj}}{2b}$.

✉ i.p.medynsky@gmail.com

Будемо користуватися ще такими позначеннями:

$\Pi_H := \{(t,x) \mid t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $\Delta_x^z f(\cdot,x,\cdot) := f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,z,\cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot,x,\cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot,x,\cdot)$, $s \in \mathbb{N}_3$; $z^{(0)} := x$, $z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3)$, $z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3)$; $x^{(1)} := (x_1, z_2, z_3)$, $x^{(2)} := (x_1, x_2, z_3)$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $x_t := \left(t^{-1/(2b_1)} x_{11}, \ldots, t^{-1/(2b_{n_1})} x_{1n_1}, t^{-1-1/(2b_1)} x_{21}, \ldots, t^{-1-1/(2b_{n_1})} x_{2n_2}, t^{-2-1/(2b_1)} x_{31}, \ldots, \ldots, t^{-2-1/(2b_{n_1})} x_{3n_3}\right)$; $X(t) := \left(X_1(t), X_2(t), X_3(t)\right)$, $X_s(t) := \left(X_{s1}(t), \ldots, X_{sn_s}(t)\right)$, $X_{sj}(t) := \sum_{r=0}^{s-1} \frac{t^r}{r!} x_{(s-r)j}$, $j \in \mathbb{N}_{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $t \in \mathbb{R}$; $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3})$, $x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3})$; $d(x,\xi) = \sum_{s=1}^{3} d_s(x_s, \xi_s)$, $d_s(x_s,\xi_s) := \sum_{j=1}^{n_s} \left|x_{sj} - \xi_{sj}\right|^{1/(2b(s-1)+m_j)}$; $X^{(1)}(t) := \left(\lambda_1, X_2(t), X_3(t)\right)$, $X^{(2)}(t) := \left(\lambda_1, \lambda_2, X_3(t)\right)$, $Z^{(s)}(t) := X(t)\big|_{x_s = z_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $Z^{(0)}(t) := X(t)$. Аналогічно будуються параметричні точки $Y(t)$, $\Lambda(t)$ за відповідними точками y і λ.

У статті часто однаковими літерами (здебільшого літерами C і c) позначатимемо різні сталі, якщо їхні величини нас не цікавлять.

Розглянемо рівняння

$$Lu(t,x) := \left(S - A(t,x,\partial_{x_1})\right)u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}, \qquad A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{\|k_1\| \le 2b} a_{k_1}(t,x)\partial_{x_1}^{k_1}.$$

Припускатимемо, що коефіцієнти a_{k_1}, $\|k_1\| \le 2b$, є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

(*i*) a_{k_1}, $\|k_1\| \le 2b$, є обмеженими й неперервними та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{\|k\|=2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta|\sigma_1|^{2b};$$

(*ii*) a_{k_1}, $\|k_1\| \le 2b$, є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$\exists H_1 > 0 \ \ \exists \alpha_1 \in (0,1) \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]}$:

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)\right| \le H_1\left(d_1(x_1,z_1)\right)^{\alpha_1}, \tag{2}$$

$\exists H_2 > 0 \ \ \exists \alpha_2 \in \left(r_1(r_2)^{-1}, (r_2)^{-1}\right] \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \forall h \in [0,T]$:

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)\right| \le H_2\left(h^{r_2\alpha_2} + \left(d_2(X_2(h),z_2)\right)^{\alpha_2}\right), \tag{3}$$

$\exists H_3 > 0 \ \ \exists \alpha_3 \in \left(r_2(r_3)^{-1}, (r_2)^{-1}\right] \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \forall h \in [0,T]$:

$$\left|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)\right| \le H_3\left(h^{r_3\alpha_3} + \left(d(X_3(h),z_3)\right)^{\alpha_3}\right); \tag{4}$$

($\boldsymbol{iii}$) $\exists H_4 > 0 \quad \forall\{(t,x),(t,\xi^{(1)}),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]} \quad \forall h \in [0,T]$:

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_s}^{z_s} a(t,x)\right| \le H_4\left(d_1(x_1,z_1)\right)^{\alpha_1}\left(h^{r_s\alpha_s} + \left(d_s(x_s,z_s)\right)^{\alpha_s}\right),$$

$$s \in \{2,3\}, \qquad (5)$$

де a − будь-який із коефіцієнтів a_{k_1}, $\|k_1\| \le 2b$, $r_j := j + 1/(2b) - 1$, $j \in \mathbb{N}_3$. В умові ($\boldsymbol{iii}$) сталі α_1, α_2 і α_3 такі, як в умові ($\boldsymbol{ii}$).

Використовуватимемо такі оцінювальні функції:

$$E_c^{\ell j}(t,z_j) := \exp\{-ct^{1-\ell q_j}|z_j|^{q_j}\},$$

$$t>0, \quad q_j := 2b_j(2b_j-1)^{-1}, \quad z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_3; \qquad (6)$$

$$E_c^{\ell}(t,x_\ell,\xi_\ell) := \prod_{j=1}^{n_\ell} E_c^{\ell j}(t,x_{\ell j}-\xi_{\ell j}), \qquad \{x_{\ell j},\xi_{\ell j}\} \subset \mathbb{R}, \quad \ell \in \mathbb{N}_3, \quad j \in \mathbb{N}_{n_\ell},$$

$$E_c^{(1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^1(t,X_1(t),\xi_1), \qquad t>0, \quad \{x_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1},$$

$$E_c^{(2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \prod_{\ell=1}^{2} E_c^{\ell}(t,X_\ell(t),\xi_\ell), \quad t>0, \quad \{x_\ell,\xi_\ell\} \subset \mathbb{R}^{n_\ell}, \quad \ell \in \mathbb{N}_2,$$

$$E_c^{(3)}(t,x,\xi) := \prod_{j=1}^{3} E_c^{j}(t,X_j(t)-\xi_j),$$

$$t>0, \quad \{x_j,\xi_j\} \subset \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_3, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \qquad (7)$$

$$a_j^{(\chi,\hat{C})}(t) := \left(\hat{C}\Gamma(\chi)t^{\chi}\right)^j\left(\Gamma(j\chi+1)\right)^{-1},$$

$$t>0, \quad \hat{C}>0, \quad \chi \in (0,1), \quad j \in \mathbb{N}\cup\{0\}; \qquad (8)$$

$$E_{c,\hat{C}}^{(\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^1(t,x_1,\xi_1)F_{c,\hat{C}}^{(\chi,1)}(t,x_1,\xi_1),$$

$$F_{c,\hat{C}}^{(\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\hat{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(1)}(t,x_1,\xi_1), \qquad t>0, \quad \{x_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \qquad (9)$$

$$E_{c,\hat{C}}^{(\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := E_c^1(t,x_1,\xi_1)F_{c,\hat{C}}^{(\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$F_{c,\hat{C}}^{(\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\hat{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$t>0, \quad \{x_j,\xi_j\} \subset \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_2; \qquad (10)$$

$$E_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi) := E_c^1(t,x_1-\xi_1)F_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi),$$

$$F_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\hat{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(3)}(t,x,\xi), \qquad t>0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \qquad (11)$$

$$I_c := \int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t-\beta,x,\lambda)E_c^{(3)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)\left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M}d\lambda,$$

$$c>0, \qquad 0 \le \tau < \beta < t, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \qquad (12)$$

$$I_c^{(\chi,\hat{C})} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t-\beta,x,\lambda)E_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\,d\lambda\,,$$

$$\chi\in(0,1],\quad c>0,\quad \hat{C}>0,\quad 0\le\tau<\beta<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n\,; \qquad (13)$$

$$I_0^{s\ell} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t-\beta,x-\lambda)E_c^{(3)}(\beta-\tau,\Lambda^{s\ell}(t-\beta),\xi)\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\,d\lambda\,; \qquad (14)$$

$$I_1^{sr} := (t-\beta)^{-m_1n_1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{(1)}(t-\beta,x_1,\lambda_1)E_c^{(3)}(\beta-\tau,\Lambda^{sr}(t-\beta),\xi)\,d\lambda_1\,; \qquad (15)$$

$$I_2^{sr} := (t-\beta)^{-m_1n_1-m_2n_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_c^{(2)}(t-\beta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)\times$$

$$\times E_c^{(3)}(\beta-\tau,\Lambda^{sr}(t-\beta),\xi)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,; \qquad (16)$$

$$I_0^{(s\ell)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t-\beta,x-\lambda)E_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(\beta-\tau,\Lambda^{s\ell}(t-\beta),\xi)\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\,d\lambda\,; \qquad (17)$$

$$I_1^{(sr)} := (t-\beta)^{-m_1n_1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{(1)}(t-\beta,x_1,\lambda_1)E_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(\beta-\tau,\Lambda^{sr}(t-\beta),\xi)\,d\lambda_1\,; \qquad (18)$$

$$I_2^{(s2)} := (t-\beta)^{-m_1n_1-m_2n_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_c^{(2)}(t-\beta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)\times$$

$$\times E_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(\beta-\tau,\Lambda^{s2}(t-\beta),\xi)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,. \qquad (19)$$

У формулі (8) $\Gamma(\cdot)$ – ґамма-функція Ейлера, в формулах (14)–(19)

$$\Lambda^{s0}(t) := Z^{(s)}(t),\qquad \Lambda^{s1}(t) := \big(\lambda_1, Z_2^{(s)}(t), Z_3^{(s)}(t)\big)\,,$$

$$\Lambda^{s2}(t) := \big(\lambda_1,\lambda_2, Z_3^{(s)}(t)\big),\qquad \Lambda^{s3}(t) := \lambda,\qquad \ell\in\mathbb{Z}_3,\quad s\in\mathbb{Z}_3\,,$$

$$0\le\tau<\beta<t\le T,\qquad \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad r\in\{2,3\}\,.$$

2. Допоміжні твердження. Властивості оцінювальних функцій (6)–(11) наведемо в такій лемі.

Лема 1. *Правильні такі твердження:*

$$E_c^{(3)}(t,x,\xi)\le E_{c_1}^{(3)}(t,x,\xi),\qquad t>0,\qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad 0<c_1<c\,; \qquad (20)$$

$$E_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi)\le F_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi)\,,$$

$$t>0,\qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad c>0,\qquad \hat{C}>0,\qquad \chi\in(0,1]\,; \qquad (21)$$

$$E_c^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_c^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\le E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\,,$$

$$0\le\tau<\beta<t\le T,\qquad \{x_1,\lambda_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}\,; \qquad (22)$$

$$E_c^{(2)}(t-\beta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)E_c^{(2)}(\beta-\tau,\lambda_1,\lambda_2,\xi_1,\xi_2)\le$$

$$\le E_{c_1}^{(2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),\qquad 0\le\tau<\beta<t\le T\,,$$

$$\{x_s,\lambda_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\qquad s\in\mathbb{N}_2,\quad c_1=c\delta_1,\quad \delta_1\in(0,1)\,; \qquad (23)$$

$$E_c^{(3)}(t-\beta,x,\lambda)E_c^{(3)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)\le E_{c_2}^{(3)}(t-\tau,x,\xi),\qquad 0\le\tau<\beta<t\le T\,,$$

$$\{x,\lambda,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad c_2=c\delta_2,\quad \delta_2\in(0,1)\,; \qquad (24)$$

$$E_{2c}^{(3)}(t,x,\xi) \le E_c^{(1)}(t,x_1,\xi_1)E_c^{(3)}(t,x,\xi),$$

$$c>0, \quad t>0, \quad \{x_1,\xi_1\}\subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \tag{25}$$

$$\left(d_s(X_s(t),\xi_s)\right)^{\alpha_s} E_c^s(t,X_s(t)-\xi_s) \le Ct^{m_s\alpha_s} E_{c_0}^s(t,X_s(t)-\xi_s),$$

$$t>0, \quad \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, \quad s\in\mathbb{N}_3, \quad c_0<c; \tag{26}$$

$$\left(d_s(X_s(t),\xi_s)\right)^{\alpha_s} E_c^{(3)}(t,x,\xi) \le Ct^{m_s\alpha_s} E_{c_0}^{(3)}(t,x,\xi),$$

$$t>0, \quad \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, \quad s\in\mathbb{N}_3, \quad c_0<c; \tag{27}$$

$$E_c^{(3)}(t-\tau,y^{(s)},\xi) \le CE_{c_0}^{(3)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0\le\tau<\beta<t, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad c_0<c; \tag{28}$$

$$E_c^{(3)}\left(\beta-\tau,Z^{(\ell)}(t-\beta),\xi\right) \le CE_{c_0}^{(3)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0\le\tau<t_1\le\beta<t\le T, \quad \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \ \ell\in\mathbb{N}_3, \ c_0<c; \tag{29}$$

$$E_c^{(3)}\left(\beta-\tau,(\lambda_1,Z_2^{(\ell)}(t-\beta),Z_3^{(\ell)}(t-\beta)),\xi\right) \le$$

$$\le E_{-c_0}^{(1)}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c_0}^{(3)}(t-\beta,x,\xi), \quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$

$$\{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad \ell\in\mathbb{N}_3, \quad \{c_0,c_1\}\subset(0,c); \tag{30}$$

$$E_c^{(3)}\left(\beta-\tau,(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(\ell)}(t-\beta)),\xi\right) \le CE_c^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$

$$\times E_c^2(\beta-\tau,\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2)E_{-c_1}^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times E_{-c_2}^2(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)E_{c_3}^3(t-\tau,X_3(t-\tau)-\xi_3),$$

$$0\le\tau<t_1\le\beta<t, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$\lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j}, \quad j\in\mathbb{N}_2, \quad \{c_0,c_1,c_2\}\subset(0,c). \tag{31}$$

Тут $C>0$*, у формулі* (28) $y^{(s)}$ *– точка відрізку прямої, що сполучає точки* x *і* $z^{(s)}$, $s\in\mathbb{N}_3$; *у формулах* (28)–(31) $|x_s-z_s|^{1/m_s}\le(t-\tau)/4$, $s\in\mathbb{N}_3$, $t_1:=(t+\tau)/2$.

Властивості інтегралів (12)–(19) наведемо в лемі 2.

Лема 2. *Правильні такі твердження:*

$$t^{-M}\int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t,x,\xi)\,d\xi = C, \qquad t>0, \qquad x\in\mathbb{R}^n; \tag{32}$$

$$t^{-m_2n_2-m_3n_3}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_c^{(3)}(t,x,\xi)\,d\xi_2\,d\xi_3 \le CE_c^1(t,x_1-\xi_1),$$

$$t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \tag{33}$$

$$t^{-m_3n_3}\int_{\mathbb{R}^{n_3}} E_c^{(3)}(t,x,\xi)\,d\xi_3 \le CE_c^{(2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, \quad s\in\mathbb{N}_2; \tag{34}$$

$$t^{-m_s n_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^s(t, X_s(t) - \xi_s)\, d\xi_s = C, \qquad t > 0, \quad x_s \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3, \tag{35}$$

$$t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t, x, \xi)\, d\xi \le C, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{36}$$

$$t^{-m_2 n_2 - m_3 n_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t, x, \xi)\, d\xi_2\, d\xi_3 \le C E_{c,\hat{C}}^{(\chi,1)}(t, x_1, \xi_1),$$

$$t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \{x_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \tag{37}$$

$$t^{-m_3 n_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_{c,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t, x, \xi)\, d\xi_3 \le C E_{c,\hat{C}}^{(\chi,2)}(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2),$$

$$t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_2; \tag{38}$$

$$I_c \le C_1 (t - \tau)^{-M} E_{c_1}^{(3)}(t - \tau, x, \xi), \qquad 0 \le \tau \le \beta < t,$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0, \quad c_1 = c(1 - \varepsilon)\delta_2, \quad C_1 = C 2^n \varepsilon^{-n}; \tag{39}$$

$$I_c^{(\chi,\hat{C})} \le C_1 (t - \tau)^{-M} E_{c_1,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau \le \beta < t,$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad c_1, C_1 \ - \textit{такі, як у } (39); \tag{40}$$

$$I_c^{s\ell} \le C (t - \tau)^{-M} E_{c_0}^{(3)}(t - \tau, x, \xi), \qquad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x, \xi, z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad \{s, \ell, r\} \subset \mathbb{Z}_3,$$

$$\textit{причому } \ \ell = 3 \ \ \textit{для} \ \ \beta \in (\tau, t); \tag{41}$$

$$I_c^{s\ell} \le C E_{c_0}^{(3)}(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t, \quad \{x_1, z_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \ell \in \mathbb{Z}_1, \quad \{s, r\} \subset \mathbb{Z}_3; \tag{42}$$

$$I_2^{s2} \le C E_{c_0}^{(3)}(t - \tau, x, \xi), \qquad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x_r, z_r\} \subset \mathbb{R}^{n_r}, \qquad r \in \mathbb{N}_2, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{Z}_3; \tag{43}$$

$$I_c^{(\chi,\hat{C})} \le C_1 (t - \tau)^{-M} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(\chi,3)}(t - \tau, x, \xi), \qquad 0 \le \tau \le \beta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\varepsilon > 0, \qquad c_1 = c(1 - \varepsilon), \quad \hat{C}_1 = \hat{C}\delta^{-n}, \quad C_1 = C 2^n \varepsilon^{-n}; \tag{44}$$

$$I_0^{(s\ell)}(z^{(r)}, \xi) \le C (t - \tau)^{-M} E_{c_0,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t - \tau, x, \xi),$$

$$0 \le \tau \le t_1 \le \beta < t, \quad \{x, \xi, z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{s, \ell, r\} \subset \mathbb{Z}_3, \quad \chi \in (0,1),$$

$$\textit{причому } \ \ell = 3 \ \ \textit{для} \ \ \beta \in (\tau, t); \tag{45}$$

$$I_1^{(s\ell)} \le C E_{c_0,\hat{C}}^{(\chi,3)}(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t, \ \{x_1, z_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \ell \in \mathbb{Z}_1, \quad \{s, r\} \subset \mathbb{Z}_3, \quad \chi \in (0,1); \tag{46}$$

$$I_2^{(s2)} \le C E^{(\chi,3)}_{c_0,\hat{C}}(t-\tau,x,\xi), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t, \quad s \in \mathbb{Z}_3, \quad \chi \in (0,1),$$

$$\{x_r, z_r\} \subset \mathbb{R}^{n_r}, \quad r \in \mathbb{N}_2, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{47}$$

У нерівності (39) *стала* δ_2 *така, як в оцінці* (24), *а стала* C *така, як в рівності* (32).

При застосуванні методу Леві для побудови ФРЗК виникають інтегральні рівняння другого роду вольтеррівського типу вигляду

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\tau,\xi) u(\tau,\xi)\, d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \tag{48}$$

ядром яких є неперервна функція

$$K : P^0_{[t_0,T]} \to \mathbb{C}, \quad P^0_{[t_0,T]} := \left\{ (t,x;\tau,\xi) \in \left(\Pi_{[t_0,T]} \times \Pi_{[t_0,T]}\right) \mid t - \tau > 0 \right\}. \tag{49}$$

Відомо, що за відповідних умов на ядро K існує єдиний розв'язок рівняння (48) для довільної прийнятної функції f, який визначається формулою

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} R(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}. \tag{50}$$

Тут

$$R(t,x;\tau,\xi) := \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,x;\tau,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{51}$$

– резольвента інтегрального рівняння (48); $K_1 := K$, K_m, $m > 1$, – повторні ядра, які визначаються таким рекурентним співвідношенням

$$K_m(t,x;\tau,\xi) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,y) K_{m-1}(\beta,y;\tau,\xi)\, dy,$$

$$(t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}. \tag{52}$$

При використанні методики параметриксу Леві побудови ФРЗК, подібної до методики з праць [4, 5], виникають інтегральні рівняння типу (50) з різними ядрами. На першому етапі методу Леві застосовуємо таку лему.

Лема 3 ([10, лема 1.9]). *Якщо ядро* (49) *є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1 (t-\tau)^{-M+\chi-1} E^{(3)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{53}$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$ *і* $\chi \in (0,1)$, *то існує резольвента* (51), *яка є неперервною функцією і для якої справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \le C_2 (t-\tau)^{-M+\chi-1} E^{(\chi,3)}_{c_2,\hat{C}_2}(t-\tau,x,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}. \tag{54}$$

Тут $C_2 > 0$, $\hat{C}_2 > 0$ *і* $c_2 \in (0, c_1)$ *– деякі сталі.*

Оскільки на наступних етапах оцінювальна функція для ядра K відповідного інтегрального рівняння має вигляд суми ряду, то використовуватимемо таку лему.

Лема 4. *Якщо ядро* (49) *є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_3 (t-\tau)^{-M+\chi-1} E^{(\chi,3)}_{c_3,\hat{C}_3}(t,x;\tau,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{55}$$

з деякими сталими $C_3 > 0$, $\hat{C}_3 > 0$, $c_3 > 0$ *і* $\chi \in (0,1)$, *то існує резольвента* (51), *яка є неперервною функцією і для якої справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \le C_4 (t-\tau)^{-M+\chi-1} E^{(\chi,3)}_{c_4,\hat{C}_4}(t-\tau,x,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \qquad (56)$$

у якій $C_4 > 0$, $\hat{C}_4 > 0$, $c_4 > 0$ *− деякі сталі, причому* $\hat{C}_4 > \hat{C}_3$, *а* $c_4 < c_3$.

3. Основні результати. Як і у випадку рівняння довільного порядку [8], процедура побудови ФРЗК складається з трьох етапів. Нехай Z_j − це ФРЗК на етапі $j \in \mathbb{N}_3$. Результати першого, другого та заключного третього етапів побудови й дослідження ФЗРК для рівняння (1) сформульовано в наступних теоремах.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1) *виконуються умови* (***i***)−(***iii***), *в яких* x *замінено на* (x_1, y'), $y' := (y_2, y_3)$. *Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* Z_1 *і правильними є такі твердження*:

$$\left|\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E^{(r_1\alpha_1,3)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x,\xi); \qquad (57)$$

$$\left|\Delta^{z_s}_{x_s} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(d_s(x_s,z_s))^{\alpha_s} (t-\tau)^{-M-M_k-r_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times \left(E^{(r_1\alpha_1,3)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x,\xi) + E^{(r_1\alpha_1,3)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right), \quad s \in \mathbb{N}_3; \qquad (58)$$

$$\left|\Delta^{z_s}_{y_s} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E^{(m_1\alpha_1,3)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x,\xi) \times$$

$$\times \left(h^{r_s\alpha_s} + (d_s(Y_s(h),z_s))^{\alpha_s} \right), \qquad s \in \{2,3\}; \qquad (59)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi \right| \le C(t-\tau)^{-M_k+r_1\alpha_1}, \qquad k \ne 0; \qquad (60)$$

$$\left| \Delta^{z_s}_{x_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi \right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M_k+r_1\alpha_1-r_s\alpha_s^0},$$

$$k \ne 0; \qquad (61)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))\, d\xi_2\, d\xi_3 \right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-r_1 n_1 - M_{k'} + r_2\alpha_2} E^{(r_1\alpha_1,1)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x_1,\xi_1), \quad k' \ne 0; \qquad (62)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)) d\xi_3 \right| \le C(t-\tau)^{-r_1 n_1 - r_2 n_2 - m_3|k_3| + m_3\alpha_3} \times$$

$$\times E^{(r_1\alpha_1,2)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), \qquad k_3 \ne 0; \qquad (63)$$

$$\partial_x^{k'} \int_{R^{n_2+n_3}} Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi_2\, d\xi_3 = 0, \qquad k' \ne 0; \qquad (64)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \ne 0; \tag{65}$$

$$\partial_x^{k'} Z_1(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} Z_1(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{66}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$; $\alpha_1^0 \in (0,\alpha_1]$, $\{\alpha_2^0, \alpha_3^0\} \subset (0,1]$, $\{k,k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\|k_1\| \le 2b$, *числа* h і α_s *такі, як вище.*

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***), *в яких* x *замінено на* (x_1, x_2, y_3). *Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* Z_2 *і справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_{c_2,\hat{C}_2}^{(r_2\alpha_2,3)}(t-\tau,x,\xi); \tag{67}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C(d_s(x_s,z_s))^{\alpha_s}(t-\tau)^{-M-M_k-r_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times\left(E_{c_2,\hat{C}_2}^{(r_2\alpha_2,3)}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_2,\hat{C}_2}^{(r_2\alpha_2,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \quad s \in \mathbb{N}_3; \tag{68}$$

$$\left|\Delta_{y_3}^{z_3} \partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_{c_2,\hat{C}_2}^{(r_2\alpha_2,3)}(t-\tau,x,\xi) \times$$
$$\times\left(h^{r_3\alpha_3} + d_3(\Upsilon_3(h),z_3)^{\alpha_3}\right), \tag{69}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\, d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_k+\ell_k}, \qquad k \ne 0; \tag{70}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\, d\xi\right| \le$$
$$\le C(d_s(x_s,z_s))^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M_k+\ell_k-r_s\alpha_s^0}, \quad s \in \mathbb{N}_3, \quad k \ne 0; \tag{71}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\, d\xi_2\, d\xi_3\right| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-r_1n_1-M_{k'}+r_2\alpha_2} E_{c_2,\hat{C}_2}^{(r_2\alpha_2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1), \quad k' \ne 0; \tag{72}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\, d\xi_2\, d\xi_3\right| \le C(d_s(x_s,z_s))^{\alpha_s^0} \times$$
$$\times(t-\tau)^{-r_1n_1-M_{k'}+r_2\alpha_2-r_s\alpha_s^0} E_{c_2,\hat{C}_2}^{(r_2\alpha_2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1), \quad k' \ne 0, \tag{73}$$

а також рівності

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\, d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \ne 0; \tag{74}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3), \qquad k_3 \ne 0, \tag{75}$$

у яких $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\alpha_1^0 \in (0,\alpha_1]$,

$\alpha_2^0 \in (0, \alpha_2]$, $\alpha_3^0 \in (0,1]$, $\{k, k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| \le 1$, *числа* h *і* α_s *такі, як вище;* $\ell_1 := r_1\alpha_1$ *при* $k_1 \ne 0$ *і* $k' = 0$; $\ell_2 := r_2\alpha_2$ *при* $k_1 = 0$ *і* $k' \ne 0$.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***)**.** *Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* Z_3, *для якого справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z_3(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_{c_3,\hat{C}_3}^{(r_3\alpha_3,3)}(t-\tau,x,\xi), \tag{76}$$

$$\left|SZ_3(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_{c_3,\hat{C}_3}^{(r_3\alpha_3,3)}(t-\tau,x,\xi), \tag{77}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $r_1\|k_1\| + \|k_2\| + \|k_3\| \le 1$.

4. Про доведення тверджень з п. 2 і п. 3. Доведення тверджень (20)–(31) з леми 1, тверджень (32)–(47) з леми 2 та тверджень з леми 4 проводяться аналогічно, як у праці [8].

ФРЗК Z_j, $j \in \mathbb{N}_3$, визначаються наведеними у **п. 1** праці [7] формулами (3), (7) і (11), у яких G_j – параметрикс, а W_j – відповідний об'ємний потенціал з невідомою густиною Q_j. Тому доведення теорем 1–3 зводиться до визначення та дослідження властивостей функцій G_j, Q_j і W_j Це проводиться аналогічно до відповідних досліджень у [4, 5] для випадку рівнянь другого порядку та у [8] для рівнянь довільного порядку, з урахуванням специфіки і властивостей оцінювальних функцій.

Зауваження 1. *Сталі* c_j, $\hat{C}_j$, $j \in \mathbb{N}_3$, *які визначають відповідні оцінювальні функції* $E_{c_j,\hat{C}_j}^{(m_j\alpha_j,3)}(t,x,\xi)$, $t > 0$, $\{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}_3$, *що входять в оцінки ФРЗК* Z_j, $j \in \mathbb{N}_3$, *та його похідних, є різними, при цьому* $c_1 > c_2 > c_3$, *а* $\hat{C}_1 < \hat{C}_2 < \hat{C}_3$. *Тому, враховуючи означення* (11) *і співвідношення між показниками Гельдера, маємо такі нерівності*:

$$E_{c_1,\hat{C}_1}^{(m_1\alpha_1,3)}(t,x,\xi) < E_{c_2,\hat{C}_2}^{(m_2\alpha_2,3)}(t,x,\xi) < E_{c_3,\hat{C}_3}^{(m_3\alpha_3,3)}(t,x,\xi), \qquad t > 0,\ \{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n.$$

Висновки. У статті встановлено умови на коефіцієнти для вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною головною частиною за основними змінними (клас $\mathbf{E}_{23}$) із двома групами змінних виродження та коефіцієнтами, які залежать від усіх змінних, за яких з використанням нової модифікації класичного методу Леві побудовано класичний ФРЗК та одержано оцінки цього розв'язку і його похідних. Отримані оцінки є менше точними, ніж оцінки для класичного ФРЗК з [4, 5] для рівнянь другого порядку, оскільки оцінювальними функціями в них є не експоненти, а ряди з експонент, типи спадання яких прямують до нуля. Аналогічну ситуацію спостерігаємо у випадку вироджених рівнянь типу Колмогорова довільного порядку. Результати статті знайдуть застосування до встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші для рівнянь з розглядуваного класу.

1. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях задачи Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 11. – С. 1536–1545.
2. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические уравнения с вырождением по части переменных // Докл. АН СССР. – 1998. – **360**, № 3. – С. 303–305.

3. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння типу Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – **2**, № 2-3. – С. 94–106.
4. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 9–31.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I // J. Math. Sci. – 2020. – **246**, No. 2. – P. 121–151. – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04726-z.
5. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 4. – С. 7–24.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. II // J. Math. Sci. – 2020. – **247**, No. 1. – P. 1–23. – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04786-1..
6. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.
7. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 2. – С. 28–42.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.* On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 4. – P. 507–526. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-3830-0.
8. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62,** № 1. – С. 7–24.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Fundamental solution of the Cauchy problem for degenerate parabolic Kolmogorov-type equations of any order // J. Math. Sci. – 2021. – **258**, No. 4. – P. 369–391.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-021-05554-5.
9. *Мединський І. П.* Фундаментальні розв'язки для вироджених параболічних рівнянь: існування, властивості та деякі їх застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 2. – С. 5–30.
10. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
   – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
11. *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations // Мат. студії. – 2017. – **47**, № 1. – С. 33–46.
   – https://doi.org/10.15330/ms.47.1.33-46.
12. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**, No. 1. – P. 53–105.

ON THE CLASSICAL FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE CLASS OF DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS

The results of construction and investigation of the classical fundamental solution of the Cauchy problem for class of degenerate parabolic Kolmogorov-type equations with a $\overrightarrow{2b}$ *-parabolic principal part with respect to the main variables and with two groups of spatial variables of degeneration and coefficients dependent on all variables are presented. The estimates for this solution and its derivatives are obtained.*

Key words: *degenerate parabolic Kolmogorov-type equation, Levi's parametrix method, volume potential,* $\overrightarrow{2b}$ *-parabolic principal part with respect to the main variables, fundamental solution of the Cauchy problem.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
19.09.22