УДК 517.95

Г. П. Лопушанська[1] ✉, О. М. М'яус[2], О. В. Пасічник[1]

ЗАДАЧА ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ДЖЕРЕЛА З НЕВІДОМИМИ ФУНКЦІЯМИ У РІВНЯННІ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ

Для рівняння дифузії з похідною Джрбашяна – Нерсесяна – Капуто дробового порядку за часом встановлено достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі про визначення m невідомих функцій із простору типу Шварца гладких швидко спадних на безмежності функцій при m інтегральних умовах перевизначення.

Ключові слова: *похідна дробового порядку, обернена задача, простори типу Шварца, інтегральні за часом умови перевизначення.*

Вступ. Рівняння з дробовими похідними за часом мають багато застосувань у практичних задачах (див., наприклад, [7, 13]). Дослідження задачі Коші і крайових задач для таких рівнянь проведено в багатьох працях, зокрема в [5–8, 11–13, 15]. Задачам із похідними дробового порядку за просторовими змінними, зокрема, у просторах функцій типу Шварца [1], присвячено праці [2, 3]. Обернені задачі для рівнянь із невідомими у правих частинах вивчались у [4, 9, 10, 14, 15 та ін.].

У цій статті вивчаємо обернену задачу про визначення джерела з m невідомими функціями із простору типу Шварца (швидко спадних на безмежності гладких функцій) у рівнянні дифузії з дробовою похідною Джрбашяна – Нерсесяна – Капуто.

1. Допоміжні факти і формулювання задачі. Нехай $Q = \mathbb{R}^n \times (0,T]$, $S(\mathbb{R}^n)$ – простір швидко спадних на безмежності нескінченно диференційовних функцій (простір Шварца), $S_\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\gamma > 0$, – простір типу $S(\mathbb{R}^n)$ [1, с. 201]:

$$S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in S(\mathbb{R}^n) : \left|D^\alpha v(x)\right| \le C_\alpha e^{-a|x|^{1/\gamma}} \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha \right\},$$

де $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – мультиіндекс, $C_\alpha = C_\alpha(v)$ – деякі додатні сталі, $a = a(v)$. Відомо [1, с. 202, с. 211], що $S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \bigcup\limits_{a>0} S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, де

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ v \in S(\mathbb{R}^n) : \left|D^\alpha v(x)\right| \le C_{\alpha,\delta} e^{-(a-\delta)|x|^{1/\gamma}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha,\ \forall \delta > 0 \Big\}$$

із деякими додатними сталими $C_{\alpha,\delta} = C_{\alpha,\delta}(v)$,

$$S_{\gamma,(a_2)}(\mathbb{R}^n) \subset S_{\gamma,(a_1)}(\mathbb{R}^n), \qquad a_1 < a_2,$$

а також

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|v\|_{k,a} = \sup_{|\alpha| \le k,\, x \in \mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{1/\gamma}} \left|D^\alpha v(x)\right| < +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k \ge 2 \Big\}.$$

Зауважимо, що

✉ lhp@ukr.net

$$\|v\|_{k,(a)} \le \|v\|_{k+p,(a)} \qquad \forall k,p \in \mathbb{N}, \quad k \ge 2, \quad v \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n).$$

Послідовність $v_m(x)$ збігається при $m \to +\infty$ до нуля у просторі $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, якщо для кожного мультиіндекса α послідовність $D^\alpha v_m(x)$ збігається при $m \to +\infty$ до нуля рівномірно на довільному компакті $|x| \le C < +\infty$ і норми $\|v_m\|_{k,(a)}$ обмежені для всіх $m, k \in \mathbb{N}$, $k \ne 1$. Через $f * g$ позначаємо згортку функцій f і g. Будемо використовувати функцію f_λ:

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(\lambda)$ – ґамма-функція, $\theta(t)$ – функція Гевісайда.

Похідна Рімана – Ліувілля $v^{(\beta)}(t)$ порядку $\beta > 0$ для функції $v(t)$ визначається формулою [13]

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta}(t) * v(t),$$

а похідна Джрбашяна – Нерсесяна – Капуто дробового порядку (регуляризована дробова похідна) – формулою [13]

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\beta-1} \frac{d^m}{d\tau^m} v(\tau)\, d\tau, \quad \beta \in (m-1, m), \quad m \in \mathbb{N},$$

$$D^1 v = \frac{dv}{dt}.$$

Нехай $A(x, D)$ – лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку

$$A(x,D)u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a(x)u,$$

а його коефіцієнти a, a_i, a_{ij}, $\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}$, є мультиплікаторами у просторі $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ (добутки їх і всіх їхніх похідних із функціями з $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ належать до $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$),

$$S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) = \{v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}) : v(\bullet, t) \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) \ \forall t \in [0,T]\},$$

$$C_{2,\beta}(Q) = \{v \in C(\bar{Q}) : Av,\ D_t^\beta v \in C(Q)\}.$$

При $\beta \in (0,1]$ вивчаємо обернену задачу

$$D_t^\beta u - A(x,D)u = \sum_{\ell=1}^m R_\ell(x) g_\ell(t) + F(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_\ell(t)\, dt = \Phi_\ell(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \ell \in \{1,\dots,m\}, \tag{3}$$

про визначення набору функцій $(u, R_1, \dots, R_m)$, де g_ℓ, Φ_ℓ, η_ℓ, $\ell \in \{1,\dots,m\}$, F, F_1 – задані функції.

Означення 1. Набір $(u, R_1, \dots, R_m) \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times [S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)]^m$ називається розв'язком задачі (1)–(3), якщо він задовольняє рівняння (1) в Q і умови (2), (3).

Означення 2. Пара функцій $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y))$ називається вектор-функцією Ґріна задачі Коші (2) для рівняння

$$D_t^\beta u - A(x,D)u = F_0(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \tag{4}$$

якщо за достатньо регулярних даних (обмеженої, неперервної і гельдерової за просторовими змінними для кожного t функції F_0, обмеженої і гельдерової F_1) функція

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau) F_0(y,\tau)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y) F_1(y)\, dy,$$

$$(x,t) \in \bar{Q}, \tag{5}$$

є класичним (із $C_{2,\beta}(\bar{Q})$) розв'язком задачі Коші (4), (2).

Вектор-функція Ґріна задачі Коші існує [6, 8, 12], причому

$$G_1(x,t,y) = \int_0^t f_{1-\beta}(\tau) G_0(x,t,y,\tau)\, d\tau, \qquad (x,t) \in Q.$$

У [8] встановлено оцінки компонент вектор-функції Ґріна

$$\left| D_x^\alpha G_0(x,t,y,\tau) \right| \le C t^{-\beta\frac{n+|\alpha|}{2}+\beta-1} e^{-c\left(|x-y|(t-\tau)^{-\beta/2}\right)^{2/(2-\beta)}} \times$$

$$\times \Psi_{n+|\alpha|-2}\left(|x-y| (t-\tau)^{-\beta/2} \right),$$

$$\left| D^\alpha G_1(x,t,y) \right| \le C t^{-\beta\frac{n+|\alpha|}{2}} e^{-c\left(|x-y|t^{-\beta/2}\right)^{2/(2-\beta)}} \Psi_{n+|\alpha|-2}\left(|x-y| t^{-\beta/2} \right), \tag{6}$$

де

$$\Psi_m(z) = \begin{cases} 1, & m < 0, \\ 1 + |\ln|z||, & m = 0, \quad |z| < 1, \\ |z|^{-m}, & m > 0, \\ \Psi_m(1), & \qquad\quad\ \ |z| > 1, \end{cases}$$

і, наприклад [8], $c < (2-\beta)\left(\dfrac{\beta^\beta}{4}\right)^{1/(2-\beta)}$, якщо $A(x,D)$ – оператор Лапласа. Тут і надалі c, C, C_k, $k \in \mathbb{N}$, – додатні сталі.

На основі оцінок (6) у [4] у просторах типу Шварца проведено дослідження операторів Ґріна

$$(G_0\varphi)(x,t,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$

$$(G_1\varphi)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)\varphi(y)\, dy, \quad (x,t) \in Q.$$

Лема 1 [4]. *Для довільних* $\gamma \ge 1 - \beta/2$, $a > 0$, $\varphi \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ *існують числа* $C > 0$, $a' \in (0,a]$ ($a' = c_\gamma \min\{cT^{-\beta/(2\gamma)}, a\}$ *із* $c_\gamma = \begin{cases} 2^{1-1/\gamma}, & \gamma \in [1-\beta/2, 1], \\ 1, & \gamma \ge 1, \end{cases}$ $a' = a$, *якщо* $\gamma \ge 1$, *і* $aT^{\beta/(2\gamma)} \le c$) *такі, що для всіх* $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, *маємо*

$$\left\|(G_0\varphi)(\bullet,t,\tau)\right\|_{k,(a')} \le C(t-\tau)^{\beta-1}\max_{t\in[0,T]}\|\varphi(\bullet,t)\|_{k,(a)}, \quad 0\le\tau<t\le T,$$

$$\left\|(G_1\varphi)(\bullet,t)\right\|_{k,(a')} \le C\max_{t\in[0,T]}\|\varphi(\bullet,t)\|_{k,(a)}, \quad t\in[0,T]. \tag{7}$$

Теорема 1 [4]. *Нехай* $\gamma\ge 1$, $0<aT^{\beta/(2\gamma)}\le c$, $F_0\in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$, $F_1\in$ $\in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u\in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ *задачі Коші* (4), (2), *який визначається формулою* (5).

2. Розв'язок оберненої задачі. Перейдемо до вивчення задачі (1)–(3). Нехай виконується

***Припущення* (A)**:

$$\gamma\ge 1,\ \ 0<aT^{\beta/(2\gamma)}\le c,\ \ F_1,\Phi_\ell,A\Phi_\ell\in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),\ \ F\in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}),$$

$$g_\ell\in C[0,T],\quad \eta_\ell\in C^1[0,T],\quad \ell\in\{1,\ldots,m\}.$$

Нехай $u\in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ є розв'язком задачі Коші (1), (2). Тоді для всіх $\ell\in\{1,\ldots,m\}$ та $x\in\bar{Q}$ маємо

$$\int_0^T (Au)(x,t)\eta_\ell(t)\,dt = A\int_0^T u(x,t)\eta_\ell(t)\,dt = (A\Phi_\ell)(x),$$

$$\int_0^T D_t^\beta u(x,t)\eta_\ell(t)\,dt = \int_0^T\left[f_{1-\beta}(t)*u_t(x,t)\right]\eta_\ell(t)\,dt =$$

$$=\int_0^T\left(\int_0^t f_{1-\beta}(t-s)u_s(x,s)\,ds\right)\eta_\ell(t)\,dt =$$

$$=\int_0^T u_s(x,s)\left(\int_s^T f_{1-\beta}(t-s)\eta_\ell(t)\,dt\right)ds =$$

$$=\int_0^T u_s(x,s)\left(\int_0^{T-s} f_{1-\beta}(\tau)\eta_1(\tau+s)\,d\tau\right)ds =$$

$$=-F_1(x)\int_0^T f_{1-\beta}(t)\eta_\ell(t)\,dt +$$

$$+\int_0^T u(x,s)\left[f_{1-\beta}(T-s)\eta_\ell(T)-\int_s^T f_{1-\beta}(q-s)\eta_\ell'(q)\,dq\right]ds.$$

Підставляючи розв'язок (5) (з $F_0(x,t)=\sum_{\ell=1}^m g_\ell(t)R_\ell(x)+F(x,t)$) задачі Коші (1), (2) в умови (4), одержуємо

$$\sum_{\ell=1}^m R_\ell(x)\int_0^T g_\ell(t)\eta_j(t)\,dt = \int_0^T u(x,s)\Big[f_{1-\beta}(T-s)\eta_j(T)-$$

$$-\int_s^T f_{1-\beta}(q-s)\eta_j'(q)\,dq\Big]ds-\Big[\int_0^T F(x,t)\eta_j(t)\,dt+$$

$$+F_1(x)\int_0^T f_{1-\beta}(t)\eta_j(t)\,dt+T(A\Phi_j)(x)\Big],\qquad j\in\{1,\ldots,m\}. \tag{8}$$

Розв'язуючи цю систему як алгебричну для кожного $x \in \mathbb{R}^n$, знаходимо вирази для невідомих $R_\ell(x)$, $\ell \in \{1,\dots,m\}$. Зокрема, у випадку виконання

***Припущення* (B)**:

$$\int_0^T g_\ell(t)\eta_j(t)dt = \delta_{\ell,j}, \qquad \{\ell, j\} \subset \{1,\dots,m\},$$

де $\delta_{\ell,j}$ – символ Кронекера, отримаємо такі вирази:

$$R_j(x) = \int_0^T u(x,s)\left[f_{1-\beta}(T-s)\eta_j(T) - \int_s^T f_{1-\beta}(q-s)\eta_j'(q)\,dq \right] ds -$$
$$- \left[\int_0^T F(x,t)\eta_j(t)\,dt + F_1(x)\int_0^T f_{1-\beta}(t)\eta_j(t)\,dt + T(A\Phi_j)(x) \right],$$
$$j \in \{1,\dots,m\}. \tag{9}$$

За умов **(A)** при $u \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ маємо $R_j \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{1,\dots,m\}$.

Підставляючи вирази (9) у формулу (5) розв'язку прямої задачі (при $F_0(x,t) = \sum_{\ell=1}^m g_\ell(t)R_\ell(x) + F(x,t)$), одержуємо

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\,dy \int_0^T u(y,s) \sum_{j=1}^m g_j(\tau)\left[f_{1-\beta}(T-s)\eta_j(T) - \right.$$
$$\left. - \int_s^T f_{1-\beta}(q-s)\eta_j'(q)\,dq \right] ds + u_0(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \tag{10}$$

де

$$u_0(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)F(y,\tau)\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)F_1(y)\,dy -$$
$$- \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau) \sum_{j=1}^m g_j(\tau)\left[T(A\Phi_j)(y) + \int_0^T F(y,s)\eta_j(s)\,ds + \right.$$
$$\left. + F_1(y)\int_0^T f_{1-\beta}(s)\eta_j(s)\,ds \right] dy, \qquad (x,t) \in Q. \tag{11}$$

Для знаходження функції u одержали лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (10) у просторі $S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$.

Лема 2. *За припущень* **(A)**, **(B)** *набір* $(u, R_1,\dots,R_m) \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times \times \left[S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)\right]^m$ *є розв'язком задачі* (1)–(3) *тоді й тільки тоді, коли* u *є розв'язком рівняння* (10), *а* R_j, $j \in \{1,\dots,m\}$, *визначаються формулами* (9).

Д о в е д е н н я. Було показано, що розв'язок u задачі (1)–(3) задовольняє рівняння (10), а R_j визначаються згідно з (9). Навпаки, нехай $u \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ є розв'язком рівняння (10), а R_j визначаються згідно з (9).

Оскільки при $F_0(x,t) = \sum_{\ell=1}^{m} g_\ell(t) R_\ell(x) + F(x,t)$ з урахуванням (9) рівняння (10) збігається з (5), то за теоремою 1 функція u задовольняє пряму задачу − задачу Коші (1), (2). Як у [4], можемо показати, що вона також задовольняє умови (3), якщо R_j визначені формулами (9). ♦

Введемо простір

$$\mathcal{M}_{k,(a)} = \mathcal{M}_{k,(a)}(T) = \left\{ v \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) : \|v\| = \max_{t\in[0,T]} \|v(\cdot,t)\|_{k,(a)} < +\infty \right\},$$

$$k \in \{2,3,\ldots\}.$$

Зауважимо, що $\mathcal{M}_{k+p,(a)} \subset \mathcal{M}_{k,(a)}$ при $p \in \mathbb{N}$.

***Припущення* (C)**: функція

$$T \sum_{j=1}^{m} \max_{t\in[0,T_0]} |g_j(t)| \left[|\eta_j(T)| + \frac{T}{2-\beta} |\eta_j'(t)| \right]$$

обмежена монотонно зростаючою функцією $b(T)$ на $[0,T_0]$ при деякому $T_0 < \left(\frac{c}{a}\right)^{2\gamma/\beta}$.

Лема 3. *За припущень* **(A)**, **(B)**, **(C)** *існує таке* $T_1 \in (0,T_0]$, *що для всіх* $T \in (0,T_1)$ *і довільної* $u_0 \in \mathcal{M}_{k,(a)}(T)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, *інтегральне рівняння* (10) *має єдиний розв'язок* $u \in \mathcal{M}_{k,(a)}(T)$.

Д о в е д е н н я. Введемо оператор

$$(Kv)(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)dy \int_0^T v(y,s) \sum_{j=1}^{m} g_j(\tau) \Big[f_{1-\beta}(T-s)\eta_j(T) -$$

$$- \int_s^T f_{1-\beta}(q-s)\eta_j'(q)\,dq \Big] ds + u_0(x,t), \qquad (x,t) \in Q,\ v \in \mathcal{M}_{k,(a)}.$$

За означенням

$$\|Kv\|_{k,(a)} = \max_{t\in[0,T]} \sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{1/\gamma}} \left| D^\alpha(Kv \quad x,t) \right|. \quad)($$

Згідно з лемою 1, при $\mu \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \tau < t \le T$,

$$\sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{1/\gamma}} \left| D_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\mu(y)\,dy \right| \le C_1 (t-\tau)^{\beta-1} \|\mu\|_{k,(a)}.$$

При $u_0 \in \mathcal{M}_{k,(a)}$ одержимо

$$\|Kv\| \le C_2 \sum_{j=1}^{m} \int_0^T \left(\int_0^t |g_j(\tau)| (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \right) \Big[f_{1-\beta}(T-s) |\eta_j(T)| +$$

$$+ \int_s^T f_{1-\beta}(q-s) |\eta_j'(q)|\,dq \Big] ds \|v\| + \|u_0\| \le C_3 b(T) \|v\| + \|u_0\|$$

$$\forall v \in \mathcal{M}_{k,(a)}.$$

Враховуючи припущення **(C)**, одержуємо існування такого числа

$T_1 > 0$, що при $T \in (0, T_1)$ лінійне інтегральне рівняння

$$u = Ku$$

має єдиний розв'язок $u \in \mathcal{M}_{k,(a)}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. ♦

Теорема 2. *За умов* (**A**), (**B**) *і* (**C**) *існує таке* $T_1 \in (0, T_0]$, *що при всіх* $T \in (0, T_1)$ *задача* (1)–(3) *має єдиний розв'язок* $(u, R_1, \dots, R_m) \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times \times [S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)]^m$, *причому* u – *розв'язок рівняння* (10), *де* u_0 *визначається згідно з* (11), *а* R_j, $j \in \{1, \dots, m\}$, *визначені формулами* (9).

Д о в е д е н н я. Як при доведенні леми 3, з використанням леми 1, одержуємо, що $u_0 \in \mathcal{M}_{k,(a)}$ при всіх $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тому, за лемою 3, існує таке число $T_1 \in (0, T_0]$, що розв'язок $u \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ рівняння (10) існує при $T \in (0, T_1)$. Відповідно до леми 2, набір функцій $(u, R_1, \dots, R_m)$, визначений згідно з (10), (11), є розв'язком задачі (1)–(3).

Покажемо єдиність розв'язку задачі (1)–(3). Якщо $(u_1, R_{11}, \dots, R_{m1})$, $(u_2, R_{12}, \dots, R_{m2})$ – два розв'язки задачі (1)–(3) і $u = u_1 - u_2$, $R_j = R_{j1} - R_{j2}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, то набір $(u, R_1, \dots, R_m)$ є розв'язком задачі

$$D_t^\beta u - A(x, D)u = \sum_{j=1}^m R_j(x) g_j(t), \qquad (x,t) \in Q,$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_j(t)\,dt = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad j \in \{1, \dots, m\}.$$

Тоді, як і вище, одержуємо, що кожний розв'язок $u(x,t)$ цієї задачі є розв'язком інтегрального рівняння (10) з $u_0(x,t) = 0$ в Q, а

$$R_j(x) = \int_0^T u(x,s)\left[f_{1-\beta}(T-s)\eta_j(T) - \int_s^T f_{1-\beta}(q-s)\eta_j'(q)\,dq\right]ds,$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \qquad j \in \{1, \dots, m\}. \tag{12}$$

За лемою 3, існує число $T_1 \in (0, T_0]$ таке, що $u(x,t) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, є єдиним розв'язком одержаного рівняння при всіх $T \in (0, T_1)$. Тоді з (12) одержуємо $R_j = 0$ у $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{1, \dots, m\}$. ♦

Розглянемо загальний випадок.

Припущення **(D)**:

$$d(T) := \det(k_{\ell,j})_{\ell,j=1,\dots,m} \neq 0,$$

де $k_{\ell,j} = \int_0^T g_\ell \eta_j\,dt$, $\{\ell, j\} \subset \{1, \dots, m\}$, а функція

$$\frac{T}{|d(T)|}\sum_{j,\ell=1}^m \max_{t\in[0,T_0]}|g_j(t)|\,|k_{j,\ell}^d|\left[|\eta_\ell(T)| + \frac{T}{2-\beta}|\eta_\ell'(t)|\right],$$

де $k_{j,\ell}^d$ – алгебричне доповнення до елемента $k_{j,\ell}$ матриці $(k_{j,\ell})_{j,\ell=1,\dots,m}$, обмежена монотонно зростаючою на $[0, T_0]$ функцією.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення* **(A)**, **(D)**. *Тоді існує таке* $T_1 \in (0, T_0]$, *що при всіх* $T \in (0, T_1)$ *задача* (1)–(3) *має єдиний розв'язок* $(u, R_1, \ldots, R_m) \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times [S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)]^m$.

Д о в е д е н н я. У загальному випадку (не припускаючи виконання умови **(B)**) потрібно ще забезпечити однозначну розв'язність алгебричної (для кожного $x \in \mathbb{R}^n$) системи рівнянь (8) щодо невідомих функцій R_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, і повторити схему доведення теореми 2. ♦

Примітка 1. Наприклад, у випадку $m = 2$ припущення **(D)** виконується при $g_1(t) = t$, $g_2(t) = 1$, $\eta_1(t) = t^2 - 2Tt$, $\eta_2(t) = 1$.

Висновки. Встановлено достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі про знаходження m невідомих функцій із простору типу Шварца гладких швидко спадних на безмежності функцій для рівняння дифузії з дробовою похідною за часом при m інтегральних за часом умовах перевизначення.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Обобщенные функции. – Вып. 2. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.
   Те саме: *Gelfand I. M., Shilov G. E.* Generalized functions. Vol. 2: Spaces of fundamental and generalized functions. – New York: Chelsea Publ. Co., 2016. – 261 p.
2. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 5. – С. 619–633.
   Те саме: *Horodets'kyi V. V., Drin Ya. M.* Multipoint (in time) problem for one class of evolutionary pseudodifferential equations // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 5. – P. 690–706. – https://doi.org/10.1007/s11253-014-0965-0.
3. *Городецький В. В., Літовченко В. А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь в просторах узагальнених функцій типу S' // Доп. АН України. – 1992. – № 10. – С. 6–9.
4. *Лопушанський А. О., Лопушанська Г. П.* Обернена задача для рівняння дробової дифузії у просторах типу Шварца // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 4. – С. 49–59.
   Те саме: *Lopushansky A. O., Lopushanska H. P.* Inverse problem for the fractional diffusion equation in Schwarz-type spaces // J. Math. Sci. – 2022. – **265**, No. 3. – P. 394–407. – https://doi.org/10.1007/s10958-022-06060-y.
5. *Alsaedi A., Kirane M., Torebek B. T.* Global existence and blow-up for a space and time nonlocal reaction-diffusion equation // Quaestiones Mathematicae. – 2021. – **44**, No. 6. – P. 747–753. – https://doi.org/10.2989/16073606.2020.1745923.
6. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. Appl. – Vol. 152.
   – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
7. *Hilfer R.* Fractional time evolution // In: R. Hilfer (Ed.) Applications of fractional calculus in physics. – Singapore: World Sci., 2000. – P. 87–130.
   – https://doi.org/10.1142/9789812817747_0002.
8. *Kochubei A. N.* Fractional-parabolic systems // Potential Anal. – 2012. – **37**, No. 1. – P. 1–30. – https://doi.org/10.1007/s11118-011-9243-z.
9. *Lopushanska H., Lopushansky A.* Inverse problem with a time-integral condition for a fractional diffusion equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2019. – **42**, No. 9. – P. 3327–3340. – https://doi.org/10.1002/mma.5587.
10. *Lopushanska H., Lopushansky A.* Inverse problems for a time fractional diffusion equation in the Schwartz-type distributions // Math. Meth. Appl. Sci. – 2021. – **44**, No 3. – P. 2381–2392. – https://doi.org/10.1002/mma.5894.
11. *Luchko Yu., Yamamoto M.* Comparison principles for the linear and semilinear time-fractional diffusion equations with the Robin boundary condition // arXiv: 2208.04606v1[math.AP] 9 Aug 2022. – https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.04606.
12. *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Appl. Math. Lett. – 1996. – 9, No. 6. – P. 23–28.

– https://doi.org/10.1016/0893-9659(96)00089-4.
13. *Povstenko Y*. Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers. – New York: Birkhäuser, 2015. – xiv+460 p.
– https://doi.org/10.1007/978-3-319-17954-4.
14. *Protsakh N*. Determining of three unknown functions of a semilinear ultraparabolic equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2021. – **44**, No. 1. – P. 617–633.
– https://doi.org/10.1002/mma.6768.
15. *Sakamoto K., Yamamoto M*. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – **382**, No. 1. – P. 426–447.
– https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.058.

PROBLEM OF DETERMINATION OF THE SOURCE WITH UNKNOWN FUNCTIONS IN A FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

For a diffusion equation with the Djrbashian – Nersesian – Caputo time-fractional derivative the sufficient conditions for the unique solvability of an inverse problem of determining m unknown functions from the Schwarz-type space of smooth functions strongly decreasing at infinity are found under m time-integral overdetermination conditions.

Key words: *fractional derivative, inverse problem, Schwarz-type spaces, time-integral overdetermination condition.*

[1] Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
09.11.22