УДК 539.3

В. І. Острик✉

ВІДРИВ ПРУЖНОЇ ВАГОМОЇ СМУГИ ВІД ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ

Розглянуто гладкий контакт пружної смуги з жорсткою основою під дією нормальної зосередженої сили. Враховано власну вагу смуги та утворення двох областей її відриву від основи. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Визначено найменше значення зовнішньої сили, необхідне для виникнення областей відриву. Знайдено розмір та положення областей відриву, розподіли контактних напружень і нормальні переміщення граней смуги.

Ключові слова: *пружна смуга, власна вага, напруження, контакт із відривом, метод Вінера – Гопфа.*

Контакт із відривом пружної смуги і пружної півплощини без урахування їхньої власної ваги розглянуто в роботі [20]. Смуга гладко спирається своєю нижньою гранню на межу півплощини. Під дією нормальної зосередженої сили на верхню грань смуги межі смуги та півплощини контактують на деякому скінченному відрізку, а поза областю контакту (на двох напівнескінченних проміжках) віддаляються одна від одної. Задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке розв'язано чисельно. Відрив пружної смуги від жорсткої основи розглянуто в роботі [6]. У статті [20] також розв'язано осесиметричну задачу про контакт із відривом пружного шару та півпростору з круговою областю контакту між ними. У [21] для розв'язання цієї задачі застосовано варіаційний метод із використанням пробних функцій, а в [13] – метод парних інтегральних рівнянь. У [4] цю задачу узагальнено на випадок багатошарової основи.

Пояснення ефекту відриву при стисканні нормальною силою пружної смуги, яка гладко контактує з жорсткою основою, можна знайти у більш ранній роботі [18] (див. також [14, с. 74]), де розглянуто стискання пружної смуги двома нормальними зосередженими силами, прикладеними в точках її протилежних граней. Виконані у [18] обчислення показали, що нормальні напруження на лінії симетрії смуги є напруженнями стиску тільки на певному скінченному інтервалі. Поза вказаним інтервалом нормальні напруження на середній лінії смуги є напруженнями розтягу. Ця задача еквівалентна задачі про дію нормальної зосередженої сили на пружну смугу, одна грань якої перебуває в умовах гладкого контакту з жорсткою основою. При цьому ширина смуги є вдвічі меншою від ширини смуги у задачі, розглянутій у [18]. Те, що згідно з результатами роботи [18] нормальні напруження на межі смуги та жорсткої стінки переходять у напруження *розтягу*, вказує на фізичну суперечливість розв'язку цієї задачі та веде до її уточненої постановки з уведенням зон відриву, тобто до постановки, розглянутої в роботах [6, 20].

Відрив вагомої смуги від основи розглянуто в роботі [19]. Показано, що з урахуванням власної ваги смуги зони відриву набувають скінченних розмірів. Задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, яке розв'язано наближено варіаційним методом. Контакт із відривом вагомої пружної смуги, модуль зсуву якої змінюється за експоненціальним законом уздовж поперечної координати, а в її верхню грань втискається штамп параболічного профілю, розглянуто в роботі [17]. Задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно методом механічних квадратур. Осесиметричну задачу з кільцевою зоною відриву пружного шару від жорсткої основи розглянуто в [7] як з урахуван-

✉ v.i.ostryk@gmail.com

ням власної ваги шару, так і для невагомого шару, закріпленого на нескінченності. Задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке розв'язано чисельним методом. У роботі [9] варіаційним методом досліджено контакт двох пружних смуг із поділом їхньої спільної межі на ділянки зчеплення, фрикційного проковзування та відриву. Враховано власну вагу однієї зі смуг, до межі якої прикладено розподілене навантаження. Межа іншої смуги закріплена.

У цій роботі із застосуванням методу Вінера – Гопфа побудуємо аналітичний розв'язок задачі про контакт із відривом пружної вагомої смуги та жорсткої основи. Раніше в [3] методом Вінера – Гопфа було знайдено точний розв'язок задачі про контакт із однобічним відривом пружної невагомої смуги та жорсткої основи за дії на верхню грань смуги тиску, рівномірно розподіленого на напівнескінченному проміжку. Інші задачі контакту з відривом із застосуванням методу Вінера – Гопфа розв'язано в роботах [5, 12, 15].

1. Постановка задачі. Нехай пружна вагома смуга $-\infty < x < \infty$, $-h \le y \le$ $\le h$ з модулем зсуву G, коефіцієнтом Пуассона ν та питомою вагою γ гладко контактує своєю нижньою гранню $y = -h$ з абсолютно жорсткою основою. На верхню грань $y = h$ смуги у точці $x = \dfrac{\ell_1}{2}$ діє нормальна зосереджена сила P (рис. 1).

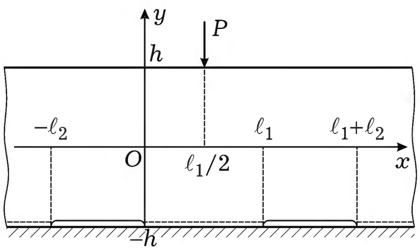

Рис. 1

Внаслідок такого навантаження нижня грань смуги віддаляється від жорсткої основи на двох проміжках $-\ell_2 < x < 0$, $\ell_1 < x < \ell_1 + \ell_2$, які називатимемо *областями відриву*. Розмір ℓ_2 кожної з областей відриву та відстань ℓ_1 між ними заздалегідь невідомі та підлягають визначенню.

Крайові умови задачі запишемо у вигляді

$$\sigma_y\Big|_{y=h} = -P\delta\left(x - \frac{\ell_1}{2}\right), \qquad \tau_{xy}\Big|_{y=\pm h} = 0, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$u_y\Big|_{y=-h} = 0, \qquad -\infty < x \le -\ell_2, \qquad 0 \le x \le \ell_1, \qquad \ell_1 + \ell_2 \le x < \infty,$$

$$\sigma_y\Big|_{y=-h} = 0, \qquad -\ell_2 < x < 0, \qquad \ell_1 < x < \ell_1 + \ell_2, \tag{1}$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

2. Інтегральне рівняння задачі. Введемо невідому функцію

$$s(x) = u_y\Big|_{y=-h}, \qquad \ell_1 < x < \ell_1 + \ell_2, \qquad -\ell_2 < x < 0. \tag{2}$$

Згідно з третьою із крайових умов (1) запишемо

$$s(x) = 0, \qquad -\infty < x \le -\ell_2, \qquad 0 \le x \le \ell_1, \qquad \ell_1 + \ell_2 \le x < \infty.$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за змінною x до рівнянь рівноваги, закону Гука та крайових умов (1), отримаємо

$$\sigma_y\Big|_{y=-h} = -2\gamma h + 2G\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_1(\mu)\tilde{p}(\mu) + \lambda_2(\mu)\tilde{s}(\mu)}{\operatorname{sh}4\mu h + 4\mu h}e^{-i\mu x}d\mu\,,$$

$$u_y\Big|_{y=h} = -(1-\nu)\frac{\gamma h^2}{G} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_3(\mu)\tilde{p}(\mu) + \mu\lambda_1(\mu)\tilde{s}(\mu)}{\mu(\operatorname{sh}4\mu h + 4\mu h)}e^{-i\mu x}d\mu\,,$$

$$\lambda_1(\mu) = 2(\operatorname{sh}2\mu h + 2\mu h\operatorname{ch}2\mu h), \qquad \lambda_2(\mu) = -\frac{\mu}{1-\nu}\left[\operatorname{sh}^2 2\mu h - (2\mu h)^2\right],$$

$$\lambda_3(\mu) = 4(1-\nu)\operatorname{sh}^2 2\mu h, \qquad \tilde{p}(\mu) = \frac{1}{4\pi G}\int\limits_{-\infty}^{-\infty}\sigma_y\Big|_{y=h}e^{i\mu x}\,dx = -\frac{P}{4\pi G}e^{i\mu\ell_1/2}\,,$$

$$\tilde{s}(\mu) = -\frac{1}{2\pi\mu^2}\left(\int\limits_{\ell_1}^{\ell_1+\ell_2} + \int\limits_{-\ell_2}^{0}\right)s''(r)e^{i\mu r}\,dr\,. \tag{3}$$

Підставивши вираз для $\sigma_y\Big|_{y=-h}$ із (3) в останню з крайових умов (1), виконавши заміни

$$\mu = \frac{\tau}{2h}, \qquad x = 2h\xi, \qquad r = 2h\eta, \qquad a = \frac{\ell_1}{2h}, \qquad b = \frac{\ell_2}{2h}$$

і перейшовши до нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = 2hs''(2h\eta), \qquad a < \eta < a+b, \qquad -b < \eta < 0\,,$$

отримаємо інтегральне рівняння

$$L(\xi) \equiv \left(\int\limits_{a}^{a+b} + \int\limits_{-b}^{0}\right)k(\xi-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = f(\xi), \quad a < \xi < a+b, \quad -b < \xi < 0\,, \tag{4}$$

де

$$k(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\tau)e^{-i\tau(\xi-\eta)}\,d\tau, \qquad K(\tau) = \frac{\operatorname{sh}^2\tau - \tau^2}{\tau(\operatorname{sh}2\tau + 2\tau)}\,,$$

$$f(\xi) = (1-\nu)\frac{\gamma h}{G} + \frac{(1-\nu)P}{4\pi Gh}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\tau + \tau\operatorname{ch}\tau}{\operatorname{sh}2\tau + 2\tau}e^{i\tau(\xi-a/2)}\,d\tau\,.$$

Праву частину рівняння (4) після перетворення інтеграла за теорією лишків подамо у вигляді

$$f(\xi) = (1-\nu)\frac{\gamma h}{G} + \frac{(1-\nu)P}{8Gh}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k\operatorname{tg}^2 s_k}{\cos s_k}e^{-s_k|\xi-a/2|}\,,$$

де s_k, $k = 1,2,\ldots$, – корені рівняння $\sin 2s + 2s = 0$ із півплощини $\operatorname{Re}s > 0$.

3. Розв'язання інтегрального рівняння. Інтегральне рівняння (4) за узагальненою схемою [11] методу Вінера – Гопфа [8] зведемо до нескінченної системи алгебричних рівнянь.

Продовжимо рівняння (4) на всю числову вісь, поклавши $\varphi(\xi) = 0$, якщо $-\infty < \xi \le -b$, $0 \le \xi \le a$, $a+b \le \xi < \infty$, і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Введемо невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi_1^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^b\varphi(\xi+a)e^{iz\xi}\,d\xi, \qquad \Phi_1^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-b}^0\varphi(\xi+a+b)e^{iz\xi}\,d\xi\,,$$

$$\Phi_2^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^b\varphi(\xi-b)e^{iz\xi}\,d\xi, \qquad \Phi_2^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-b}^0\varphi(\xi)e^{iz\xi}\,d\xi\,,$$

$$\Psi_1^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a L(\xi) e^{iz\xi}\, d\xi, \qquad \Psi_1^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 L(\xi + a) e^{iz\xi}\, d\xi,$$

$$\Psi_2^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty L(\xi + a + b) e^{iz\xi}\, d\xi, \qquad \Psi_2^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L(\xi - b) e^{iz\xi}\, d\xi, \quad (5)$$

серед яких перші шість функцій − цілі, а дві останні − аналітичні, відповідно, у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ ($c^+ < 0$), $\operatorname{Im} z < c^-$ ($c^- > 0$). Із застосуванням теореми про згортку отримаємо систему функціональних рівнянь

$$\mathcal{K}(z)\left[e^{iza}\Phi_1^+(z) + \Phi_2^-(z)\right] - \Psi_1^+(z) - e^{iz(a+b)}\Psi_2^+(z) - e^{-izb}\Psi_2^-(z) = F(z),$$

$$\Phi_1^+(z) = e^{izb}\Phi_1^-(z), \qquad \Phi_2^+(z) = e^{izb}\Phi_2^-(z), \qquad \Psi_1^+(z) = e^{iza}\Psi_1^-(z),$$

$$-\infty < \operatorname{Re} z < \infty, \qquad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-, \quad (6)$$

права частина якої має вигляд

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_a^{a+b} + \int_{-b}^0\right) f(\xi) e^{iz\xi}\, d\xi = e^{iza}F^+(z) + F^-(z),$$

$$F^+(z) \equiv F^-(-z) = \frac{\gamma_1}{iz}\left(e^{izb} - 1\right) + F_1^+(z) + e^{izb}F_2^+(z), \qquad \gamma_1 = \frac{(1-\nu)\gamma h}{\sqrt{2\pi}G},$$

$$F_1^+(z) \equiv F_1^-(-z) = \frac{q}{4}\sum_{k=1}^\infty \frac{s_k \operatorname{tg}^2 s_k}{\cos s_k} \frac{e^{-s_k a/2}}{s_k - iz},$$

$$F_2^+(z) \equiv F_2^-(-z) = -\frac{q}{4}\sum_{k=1}^\infty \frac{s_k \operatorname{tg}^2 s_k}{\cos s_k} \frac{e^{-s_k(a/2+b)}}{s_k - iz}, \qquad q = \frac{(1-\nu)P}{2\sqrt{2\pi}Gh}.$$

Із умов симетрії

$$\varphi(a - \eta) \equiv \varphi(\eta), \qquad f(a - \xi) \equiv f(\xi), \qquad L(a - \xi) \equiv L(\xi) \quad (7)$$

випливають тотожності

$$\Phi_2^+(z) \equiv \Phi_1^-(-z), \qquad \Phi_2^-(z) \equiv \Phi_1^+(-z),$$

$$\Psi_1^-(z) \equiv \Psi_1^+(-z), \qquad \Psi_2^-(z) \equiv \Psi_2^+(-z). \quad (8)$$

Факторизуємо коефіцієнт $\mathcal{K}(z)$ з рівняння (6):

$$\mathcal{K}(z) = \frac{z^2}{12}\mathcal{K}^+(z)\mathcal{K}^-(z), \qquad \mathcal{K}^+(z) \equiv \mathcal{K}^-(-z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{iz}{\zeta_n}\right)\left(1 - \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \quad (9)$$

де $\mathcal{K}^+(z)$ і $\mathcal{K}^-(z)$ − функції, які є аналітичними та не дорівнюють нулеві у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ і $\operatorname{Im} z < c^-$, відповідно; ζ_n, $n = 1, 2, \ldots$, − корені рівняння $\sin^2 s - s^2 = 0$ із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$.

З урахуванням (8), (9) систему рівнянь (6) запишемо так:

$$\frac{z^2}{12}\mathcal{K}^-(z)\left[\Phi_2^-(z) + e^{iza}\Phi_1^+(z)\right] + \frac{\Omega^-(z)}{\mathcal{K}^+(z)} - \frac{\Psi^+(z)}{\mathcal{K}^+(z)} = \frac{F_1^-(z)}{\mathcal{K}^+(z)},$$

$$\frac{z^2}{12}\mathcal{K}^+(z)\Phi^+(z) + \frac{\Omega^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - \frac{\Psi_2^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = \frac{F_2^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)}, \qquad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-. \quad (10)$$

При цьому

$$\Phi^{+}(z)=\Phi_2^{+}(z)+e^{iz(a+b)}\Phi_1^{+}(z),$$

$$\Psi^{+}(z)=\Psi_1^{+}(z)+e^{iz(a+b)}\left(\Psi_2^{+}(z)+F_2^{+}(z)+\frac{\gamma_1}{iz}\right)+e^{iza}F_1^{+}(z)+\frac{\gamma_1}{iz}\left(1-e^{iza}\right),$$

$$\Omega^{+}(z)=-e^{izb}\left(\Psi^{+}(z)+F_1^{-}(z)\right)+\frac{\gamma_1}{iz},$$

$$\Omega^{-}(z)=-e^{-izb}\left(\Psi_2^{-}(z)+F_2^{-}(z)-\frac{\gamma_1}{iz}\right). \qquad (11)$$

Окремі складові системи рівнянь (10), які не є аналітичними у півплощинах $\operatorname{Im} z>c^{+}$, $\operatorname{Im} z<c^{-}$ функціями, подамо як різниці аналітичних у цих півплощинах функцій:

$$\frac{z^2}{12}e^{iza}\mathcal{K}^{-}(z)\Phi_1^{+}(z)=\chi_1^{+}(z)-\chi_1^{-}(z), \qquad \frac{\Omega^{-}(z)}{\mathcal{K}^{+}(z)}-\frac{\gamma_1}{iz}=\chi_2^{+}(z)-\chi_2^{-}(z),$$

$$\frac{\Omega^{+}(z)}{\mathcal{K}^{-}(z)}=\chi^{+}(z)-\chi^{-}(z), \qquad \frac{F_1^{-}(z)}{\mathcal{K}^{+}(z)}=f^{+}(z)-f^{-}(z),$$

$$\chi_1^{-}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{1k}\Phi_1^{+}(is_k)}{s_k+iz}, \qquad \chi_2^{+}(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}}{\zeta_k-iz}\Omega^{-}(-i\zeta_k)e^{\zeta_k b},$$

$$\chi^{-}(z)=\frac{\gamma_1}{iz}\left(1-\frac{1}{\mathcal{K}^{-}(z)}\right)+\chi_0^{-}(z), \qquad \chi_0^{-}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}}{\zeta_k+iz}\left(\Omega^{+}(i\zeta_k)+\frac{\gamma_1}{\zeta_k}\right)e^{\zeta_k b},$$

$$\alpha_{1k}=\frac{s_k\operatorname{tg}^2 s_k\cdot e^{-s_k a}}{4\cos^2 s_k\cdot\mathcal{K}^{+}(is_k)}, \qquad \alpha_{2k}=-\frac{\zeta_k^3(\sin 2\zeta_k+2\zeta_k)}{12(\sin 2\zeta_k-2\zeta_k)}\mathcal{K}^{+}(i\zeta_k)e^{-\zeta_k b},$$

$$f^{-}(z)=-q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha'_{1k}}{s_k+iz}, \qquad \alpha'_{1k}=\alpha_{1k}e^{s_k a/2}\cos s_k, \qquad k=1,2,\ldots. \qquad (12)$$

Остаточно систему рівнянь (6) зводимо до вигляду

$$\frac{z^2}{12}\mathcal{K}^{-}(z)\Phi_2^{-}(z)-\chi_1^{-}(z)-\chi_2^{-}(z)+f^{-}(z)=$$

$$=\frac{\Psi^{+}(z)}{\mathcal{K}^{+}(z)}-\frac{\gamma_1}{iz}-\chi_1^{+}(z)-\chi_2^{+}(z)+f^{+}(z),$$

$$\frac{z^2}{12}\mathcal{K}^{+}(z)\Phi^{+}(z)+\chi^{+}(z)=\frac{\Psi_2^{-}(z)}{\mathcal{K}^{-}(z)}+\chi^{-}(z)+\frac{F_2^{-}(z)}{\mathcal{K}^{-}(z)}, \qquad c^{+}<\operatorname{Im} z<c^{-}. \qquad (13)$$

Ліва і права частини кожного з рівнянь (13) є аналітичними відповідно у півплощинах $\operatorname{Im} z>c^{+}$ і $\operatorname{Im} z<c^{-}$, тобто аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і, отже, є довільною цілою функцією. Із асимптотичних оцінок

$$\mathcal{K}^{\pm}(z)=O(z^{-3/2}), \qquad \Phi_2^{-}(z),\Phi^{+}(z)=o(1),$$

$$\{\chi_1^{-}(z),\chi_2^{-}(z),\chi^{+}(z),f^{-}(z)\}=O(z^{-1}), \qquad |z|\to\infty,$$

випливає, що ця ціла функція є сталою: C_1 – для першого рівняння і C_2 – для другого. Звідси знаходимо розв'язок системи функціональних рівнянь (6):

$$\Phi_2^-(z) = 12\frac{\chi_1^-(z) + \chi_2^-(z) - f^-(z) + C_1}{z^2\mathcal{K}^-(z)},$$

$$\Psi^+(z) = \mathcal{K}^+(z)\left(\chi_1^+(z) + \chi_2^+(z) - f^+(z) + \frac{\gamma_1}{iz} + C_1\right),$$

$$\Phi^+(z) = 12\frac{C_2 - \chi^+(z)}{z^2\mathcal{K}^+(z)}, \qquad \Psi_2^-(z) = \mathcal{K}^-(z)\left[C_2 - \chi^-(z)\right] - F_2^-(z). \tag{14}$$

Вимагаючи аналітичності функцій $\Phi_2^-(z)$, $\Phi^+(z)$ у точці $z = 0$, знаходимо

$$C_1 = f^-(0) - \chi_1^-(0) - \chi_2^-(0), \qquad C_2 = \chi^+(0) \tag{15}$$

і приходимо до додаткових умов

$$\frac{d}{dz}\left[\chi_1^-(z) + \chi_2^-(z) - f^-(z)\right]\Big|_{z=0} = 0, \qquad \frac{d}{dz}\chi^+(z)\Big|_{z=0} = 0. \tag{16}$$

На підставі (11), (12) приходимо до висновку, що перша і третя з рівностей (14) є еквівалентними, рівності з (15) еквівалентні одному рівнянню

$$C_1 = -\chi(0), \tag{17}$$

а умови (16) – одній додатковій умові

$$\chi'(0) = 0. \tag{18}$$

При цьому

$$\chi(z) = \chi_1^-(z) + \chi_2^+(z) - f^-(z) + e^{-izb}\frac{\mathcal{K}^-(z)}{\mathcal{K}^+(z)}(C_2 - \chi^-(z)) - \frac{\gamma_1}{iz}\left(\frac{e^{-izb}}{\mathcal{K}^+(z)} - 1\right).$$

Ще дві додаткові умови

$$\chi''(0) = 0, \qquad \chi'''(0) = 0 \tag{19}$$

випливають із умов однозначності нормальних переміщень точок нижньої грані смуги:

$$\int_{-\ell_2}^{0} s''(x)\,dx = 0, \qquad \int_{-\ell_2}^{0} s'(x)\,dx = 0,$$

які, в свою чергу, рівносильні умовам

$$\Phi_2^-(0) = 0, \qquad \frac{d}{dz}\Phi_2^-(z)\Big|_{z=0} = 0.$$

У розв'язку (14) системи функціональних рівнянь (6) залишаються невідомими величини

$$z_k = \frac{1}{q}\Phi_1^+(is_k) = \frac{1}{q}\Phi_2^-(-is_k), \qquad z_k^+ = \frac{1}{q}\left[\Psi^+(i\zeta_k) + F_1^-(i\zeta_k)\right],$$

$$z_k^- = \frac{1}{q}\left(\Psi_2^-(-i\zeta_k) + F_2^-(-i\zeta_k) - \frac{\gamma_1}{\zeta_k}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Для їх визначення розв'язок (14) запишемо у вигляді

$$\Phi_2^-(z) = \frac{12}{z^2\mathcal{K}^-(z)}\left(\chi_1^-(z) + \chi_2^+(z) - f^-(z) + \frac{\gamma_1}{iz} + C_1\right) +$$

$$+ \frac{e^{-izb}}{\mathcal{K}(z)}\left(\Psi_2^-(z) + F_2^-(z) - \frac{\gamma_1}{iz}\right),$$

$$\Psi^{+}(z)=\mathcal{K}^{+}(z)\left(\chi_1^{-}(z)+\chi_2^{+}(z)-f^{-}(z)+\frac{\gamma_1}{iz}+C_1\right)-F_1^{-}(z)+$$

$$+e^{iza}\mathcal{K}(z)\Phi_1^{+}(z),$$

$$\Psi_2^{-}(z)=\mathcal{K}^{-}(z)\Big[C_2-\chi^{-}(z)\Big]-F_2^{-}(z), \tag{21}$$

і в першій з рівностей (21) покладемо $z=-is_n$, у другій – $z=i\zeta_n$, у третій – $z=-i\zeta_n$, $n=1,2,\ldots$. Увівши позначення

$$\beta_{1n}=\frac{12}{s_n^2\mathcal{K}^{+}(is_n)}, \qquad \beta_{2n}=-\mathcal{K}^{-}(i\zeta_n),$$

$$g_n=-\frac{\beta_{1n}}{q}\left(\frac{\gamma_1}{s_n}+C_1+q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{1k}'}{s_k+s_n}\right),$$

$$g_n^{+}=\frac{\beta_{2n}}{q}\left(\frac{\gamma_1}{\zeta_n}-C_1-q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{1k}'}{s_k-\zeta_n}\right), \qquad g_n^{-}=\frac{\beta_{2n}}{q}\left(\frac{\gamma_1}{\zeta_n}-C_2\right),$$

$$n=1,2,\ldots,$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$z_n+\beta_{1n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}z_k}{s_k+s_n}+\frac{\alpha_{2k}z_k^{-}}{\zeta_k-s_n}\right)=g_n,$$

$$z_n^{+}+\beta_{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}z_k}{s_k-\zeta_n}+\frac{\alpha_{2k}z_k^{-}}{\zeta_k+\zeta_n}\right)=g_n^{+},$$

$$z_n^{-}+\beta_{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}z_k^{+}}{\zeta_k+\zeta_n}=g_n^{-}, \qquad n=1,2,\ldots. \tag{22}$$

Система рівнянь (22), коефіцієнти якої експоненціально спадають зі зростанням k, є регулярною системою типу Пуанкаре – Коха і може бути розв'язана методами редукції і послідовних наближень [2].

Для визначення невідомих a, b, C_1, C_2 слугують умови (17), (18), (19), які перетворимо до вигляду

$$q\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}z_k+\alpha_{1k}'}{s_k}+\frac{\alpha_{2k}(z_k^{+}+z_k^{-})}{\zeta_k}\right)+C_1+C_2=-\gamma_1 b_1,$$

$$q\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}z_k+\alpha_{1k}'}{s_k^2}+\frac{\alpha_{2k}(z_k^{+}-z_k^{-})}{\zeta_k^2}\right)+b_1q_1=-\frac{1}{2}\gamma_1 b_1^2,$$

$$q\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}z_k+\alpha_{1k}'}{s_k^3}+\frac{\alpha_{2k}(z_k^{+}+z_k^{-})}{\zeta_k^3}\right)+b_1q_2+\frac{1}{2}b_1^2q_1=-\frac{1}{6}\gamma_1\left(b_1^3+2ia_0\right),$$

$$q\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}z_k+\alpha_{1k}'}{s_k^4}+\frac{\alpha_{2k}(z_k^{+}-z_k^{-})}{\zeta_k^4}\right)+b_1q_3+\frac{1}{2}b_1^2q_2+\frac{1}{6}\left(b_1^3+2ia_0\right)q_1=$$

$$=-\frac{1}{24}\gamma_1 b_1\left(b_1^3+8ia_0\right). \tag{23}$$

Тут

$$b_1 = b - 2ia_1, \qquad a_0 = 2i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta_n^3} - \frac{1}{s_n^3}\right), \qquad a_1 = \mathcal{K}^{+\prime}(0) = -i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta_n} - \frac{1}{s_n}\right),$$

$$q_1 = q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}z_k^+}{\zeta_k} + C_2, \qquad q_2 = q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}z_k^+}{\zeta_k^2}, \qquad q_3 = q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}z_k^+}{\zeta_k^3}.$$

Подамо розв'язок системи рівнянь (22) у вигляді

$$z_k = \tilde{z}_k + \frac{C_1}{q}\hat{z}_k + \frac{C_2}{q}\breve{z}_k, \qquad z_k^{\pm} = \tilde{z}_k^{\pm} + \frac{C_1}{q}\hat{z}_k^{\pm} + \frac{C_2}{q}\breve{z}_k^{\pm}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

де $\tilde{z}_k$, $\tilde{z}_k^{\pm}$, $\hat{z}_k$, $\hat{z}_k^{\pm}$, $\breve{z}_k$, $\breve{z}_k^{\pm}$ – розв'язки цієї системи з правими частинами

$$\tilde{g}_n = -\beta_{1n}\left(\frac{\gamma_1}{qs_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha'_{1k}}{s_k + s_n}\right), \qquad \tilde{g}_n^+ = \beta_{2n}\left(\frac{\gamma_1}{qs_n} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha'_{1k}}{s_k - \zeta_n}\right),$$

$$\tilde{g}_n^- = \frac{\gamma_1\beta_{2n}}{q\zeta_n}, \qquad \hat{g}_n = -\beta_{1n}, \qquad \hat{g}_n^+ = -\beta_{2n}, \qquad \hat{g}_n^- = 0,$$

$$\breve{g}_n = 0, \qquad \breve{g}_n^+ = 0, \qquad \breve{g}_n^- = -\beta_{2n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Тоді перші дві з умов (23) запишемо як систему лінійних рівнянь відносно сталих C_1, C_2:

$$A_{11}C_1 + A_{12}C_2 = qB_1, \qquad A_{21}C_1 + A_{22}C_2 = qB_2,$$

у якій

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}\hat{z}_k}{s_k} + \frac{\alpha_{2k}(\hat{z}_k^+ + \hat{z}_k^-)}{\zeta_k}\right) + 1,$$

$$A_{12} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}\breve{z}_k}{s_k} + \frac{\alpha_{2k}(\breve{z}_k^+ + \breve{z}_k^-)}{\zeta_k}\right) + 1,$$

$$A_{21} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}\hat{z}_k}{s_k^2} + \frac{\alpha_{2k}(\hat{z}_k^+ - \hat{z}_k^-)}{\zeta_k^2}\right) + b_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}\hat{z}_k^+}{\zeta_k},$$

$$A_{22} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}\breve{z}_k}{s_k^2} + \frac{\alpha_{2k}(\breve{z}_k^+ - \breve{z}_k^-)}{\zeta_k^2}\right) + b_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}\breve{z}_k^+}{\zeta_k} + 1\right),$$

$$B_1 = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}\tilde{z}_k + \alpha'_{1k}}{s_k} + \frac{\alpha_{2k}(\tilde{z}_k^+ + \tilde{z}_k^-)}{\zeta_k}\right) - \frac{\gamma_1}{q}b_1,$$

$$B_2 = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{1k}\tilde{z}_k + \alpha'_{1k}}{s_k^2} + \frac{\alpha_{2k}(\tilde{z}_k^+ - \tilde{z}_k^-)}{\zeta_k^2}\right) + b_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}\tilde{z}_k^+}{\zeta_k} - \frac{\gamma_1}{2q}b_1^2.$$

Звідси знаходимо

$$C_1 = q\frac{A_{22}B_1 - A_{12}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}}, \qquad C_2 = q\frac{A_{11}B_2 - A_{21}B_1}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}}.$$

Після цього невідомі a, b визначаємо з двох останніх умов (23).

Оберненим перетворенням Фур'є першої та четвертої рівностей із (5) знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (4):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\tau a}\Phi_1^+(\tau) + \Phi_2^-(\tau)\right]e^{-i\tau\xi}\,d\tau,$$

$$a < \xi < a + b, \qquad -b < \xi < 0. \tag{24}$$

З огляду на першу з умов симетрії (7) обмежимось перетворенням інтеграла з (24) лише на інтервалі $a < \xi < a+b$. На підставі другої з тотожностей (8), розв'язку (21), а також першої з рівностей (9) маємо

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1^+(\tau) e^{i\tau(a-\xi)} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2^-(\tau) e^{i\tau(\xi-a)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau)}{\operatorname{sh}^2 \tau - \tau^2} \mathscr{K}^+(\tau) \left(\chi_1^-(\tau) + \chi_2^+(\tau) - f^-(\tau) + \frac{\gamma_1}{i\tau} + C_1 \right) \times$$

$$\times e^{i\tau(\xi-a)} d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau)}{\operatorname{sh}^2 \tau - \tau^2} \left[\mathscr{K}^-(\tau)(C_2 - \chi^-(\tau)) - \frac{\gamma_1}{i\tau} \right] \times$$

$$\times e^{i\tau(\xi-a-b)} d\tau ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2^-(\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau = 0, \qquad a < \xi < a+b . \tag{25}$$

Обчисливши інтеграли із (25) за теорією лишків, отримуємо

$$\varphi(\xi) = c_0 + c_1(\xi - a) + c_2(\xi - a)^2 -$$

$$- \sqrt{2\pi}\, q \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^2 \zeta_k^- \left(z_k^+ e^{\zeta_k(a-\xi)} + z_k^- e^{\zeta_k(\xi-a-b)} \right), \qquad a < \xi < a+b ,$$

$$c_0 = -6\sqrt{2\pi} \left\{ 2(b - ia_1)q_1 + 2q_2 + \gamma_1 \left[(b - ia_1)^2 - \frac{1}{5} \right] \right\},$$

$$c_1 = 12\sqrt{2\pi} \left[q_1 + \gamma_1(b - ia_1) \right], \qquad c_2 = -6\sqrt{2\pi}\gamma_1 ,$$

$$\zeta_k^- = \frac{\sin 2\zeta_k + 2\zeta_k}{\zeta_k(\sin 2\zeta_k - 2\zeta_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{26}$$

4. Напруження та переміщення на гранях смуги. Із першої рівності (3) маємо контактні напруження

$$\sigma_y\Big|_{y=-h} = \frac{2G}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{K}(\tau) \left[e^{i\tau a} \Phi_1^+(\tau) + \Phi_2^-(\tau) \right] e^{-i\tau\xi} d\tau - f(\xi) \right\},$$

$$\xi = \frac{x}{2h}, \quad -\infty < x < -\ell_2, \quad 0 < x < \ell_1, \quad \ell_1 + \ell_2 < x < \infty . \tag{27}$$

Після знаходження інтегралів із (27) отримаємо

$$\sigma_y\Big|_{y=-h} = -2h\gamma - \frac{P}{4h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \operatorname{tg}^2 s_k}{\cos^2 s_k} \left[z_k \left(e^{-s_k \xi} + e^{s_k(\xi-a)} \right) + e^{-s_k|\xi - a/2|} \cos s_k \right],$$

$$0 < x < \ell_1, \qquad 0 < \xi < a ,$$

$$\sigma_y\Big|_{y=-h} = -2h\gamma + 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1k}}{s_k^2} e^{s_k a} \left(\frac{P}{h} æ_k + \frac{2h\gamma}{s_k} \right) e^{s_k(a+b-\xi)} ,$$

$$æ_k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2m} z_m^+}{\zeta_m - s_k} + \frac{C_2}{q}, \qquad \ell_1 + \ell_2 < x < \infty, \qquad a + b < \xi < \infty . \tag{28}$$

З огляду на симетрію задачі вираз для $\sigma_y\big|_{y=-h}$ на інтервалі $-\infty < x <$

$< -\ell_2$ повторює праву частину другої з рівностей (28) із заміною $a-\xi$ на ξ.

Із асимптотичних формул

$$\Psi_1^+(z) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a f(\xi) e^{iz\xi} d\xi \sim \frac{\sqrt{6} C_1}{\sqrt{(-iz)^3}},$$

$$\Psi_2^-(z) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(\xi - b) e^{iz\xi} d\xi \sim \frac{\sqrt{6} C_2}{\sqrt{(iz)^3}}, \qquad |z| \to \infty,$$

на підставі тауберової теореми [8] (леми Ватсона [16]) знаходимо поведінку нормальних напружень поблизу країв скінченної ($0 \le x \le \ell_1$) та напівнескінченної ($\ell_1 + \ell_2 \le x < \infty$) областей контакту:

$$\sigma_y\Big|_{y=-h} \sim 2P \frac{C_2}{q} \sqrt{\frac{3(\ell_1 - x)}{\pi h^3}}, \qquad x \to \ell_1 - 0,$$

$$\sigma_y\Big|_{y=-h} \sim 2P \frac{C_1}{q} \sqrt{\frac{3(x - \ell_1 - \ell_2)}{\pi h^3}}, \qquad x \to \ell_1 + \ell_2 + 0, \tag{29}$$

де вони прямують до нуля з характерною для гладкого контакту кореневою поведінкою [1].

Нормальні переміщення нижньої грані смуги знайдемо, врахувавши заміну (2) і проінтегрувавши двічі першу з рівностей (26), після перетворення рядів зі слабкою збіжністю до рядів з експоненціальною збіжністю:

$$q \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^- z_k^- = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - ic}^{\infty - ic} \frac{\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau}{\tau(\operatorname{sh}^2 \tau - \tau^2)} \mathcal{K}^-(\tau) \left(\chi_0^-(\tau) + \frac{\gamma_1}{i\tau} - C_2 \right) d\tau =$$

$$= -\frac{6}{\pi} \int_{-\infty - ic}^{\infty - ic} \frac{1}{\tau^4 \mathcal{K}^+(\tau)} \left(\chi_0^-(\tau) + \frac{\gamma_1}{i\tau} - C_2 \right) d\tau =$$

$$= -2ia_3' q_1 + 6a_1' q_2 + 12(ia_1 q_3 - q_4) + \gamma_1 a_4' - q \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^- z_k^+ e^{-\zeta_k b},$$

$$q \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \zeta_k^- z_k^- = -6a_1' q_1 - 12(ia_1 q_2 - q_3) + 2i\gamma_1 a_3' + q \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \zeta_k^- z_k^+ e^{-\zeta_k b},$$

$$a_1' = a_1^2 + \frac{1}{5}, \qquad a_3' = a_3 + \frac{6}{5} a_1, \qquad a_4' = \frac{3}{2} a_1^4 - \frac{9}{5} a_1^2 - 2a_1 a_3 - \frac{43}{350},$$

$$a_3 = \mathcal{K}^{+'''}(0) = a_1^3 - \frac{3}{5} a_1 + a_0, \qquad q_4 = q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k} z_k^+}{\zeta_k^4}, \qquad 0 < c < \operatorname{Re} \zeta_1.$$

Отримаємо

$$u_y\Big|_{y=-h} = \sum_{j=0}^{4} d_j (x - \ell_1)^j - (1 - \nu) \frac{P}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^- \left(z_k^+ e^{\zeta_k (a - \xi)} + z_k^- e^{\zeta_k (\xi - a - b)} \right),$$

$$\ell_1 < x < \ell_1 + \ell_2, \qquad a < \xi < a + b,$$

$$d_0 = -2h\sqrt{2\pi} \left\{ 2b_3 q_1 + 6b_2 q_2 + 12\Big[(b - ia_1) q_3 + q_4 \Big] + \frac{\gamma_1}{2} b_4 \right\},$$

$$d_1 = \sqrt{2\pi} \left\{ 6b_2 q_1 + 12\Big[(b - ia_1) q_2 + q_3 \Big] + 2\gamma_1 b_3 \right\}, \qquad b_2 = b^2 - 2ia_1 b - a_1',$$

$$b_3 = b^3 - 3ia_1b^2 - 3a_1'b + ia_3', \qquad b_4 = b^4 - 4ia_1b^3 - 6a_1'b^2 + 4ia_3'b - 2a_4',$$

$$d_2 = \frac{c_0}{4h}, \qquad d_3 = \frac{c_1}{6(2h)^2}, \qquad d_4 = \frac{c_2}{12(2h)^3}.$$

Нормальні переміщення верхньої грані смуги з (3) перетворимо до вигляду

$$u_y\Big|_{y=h} = \frac{1-\nu}{2G}\left\{-2\gamma h^2 + P\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^2 s_k}{s_k\cos s_k}\left[z_k\left(e^{-s_k\xi} + e^{s_k(\xi-a)}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + e^{-s_k|\xi-a/2|}\cos s_k\right]\right\}, \qquad 0 < x < \ell_1, \qquad 0 < \xi < a,$$

$$u_y\Big|_{y=h} = \sum_{j=0}^{4} d_j(x-\ell_1)^j - (1-\nu)\frac{P}{G}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k^+\left[z_k^+e^{\zeta_k(a-\xi)} + z_k^-e^{\zeta_k(\xi-a-b)}\right],$$
$$\ell_1 < x < \ell_1 + \ell_2, \qquad a < \xi < a + b,$$

$$u_y\Big|_{y=h} = -\frac{1-\nu}{G}\left[\gamma h^2 + 24\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{1k}}{s_k^4}e^{s_ka}\left(P\text{æ}_k + \gamma h^2\frac{2}{s_k}\right)e^{s_k(a+b-\xi)}\cos s_k\right],$$
$$\ell_1 + \ell_2 < x < \infty, \qquad a + b < \xi < \infty,$$

$$\zeta_k^+ = \frac{2(\sin\zeta_k + \zeta_k\cos\zeta_k)}{\zeta_k(\sin 2\zeta_k - 2\zeta_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Знайдемо поведінку переміщень $u_y\big|_{y=h}$ в околі точки $x = \frac{\ell_1}{2}$. Зазначимо, що ряд у першій з рівностей (30) розбігається у цій точці (при $\xi = \frac{a}{2}$) з огляду на його останню складову. Підсумувавши із використанням асимптотики коренів $s_k \sim \frac{\pi k}{2}$, $\operatorname{tg}^2 s_k \sim -1$, $k \to \infty$, головну частину ряду

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-(\pi k/2)|\xi-a/2|} = \frac{2}{\pi}\ln\left(1 - e^{-(\pi/2)|\xi-a/2|}\right) \sim \frac{2}{\pi}\ln\left|\xi - \frac{a}{2}\right|, \qquad \xi \to \frac{a}{2},$$

отримаємо

$$u_y\Big|_{y=h} \sim \frac{(1-\nu)P}{\pi G}\ln\left|x - \frac{\ell_1}{2}\right|, \qquad x \to \frac{\ell_1}{2}. \tag{31}$$

Поведінка нормальних переміщень із (31) є такою самою, як і в задачі про дію нормальної зосередженої сили на пружну півплощину [1].

З асимптотичних формул

$$\Phi_2^-(z) \sim -\frac{2\sqrt{6}\,C_1}{\sqrt{iz}}, \qquad \Phi_2^+(z) \sim -\frac{2\sqrt{6}\,C_2}{\sqrt{-iz}}, \qquad |z| \to \infty,$$

за лемою Ватсона [16] знаходимо поведінку переміщень на краях однієї з областей відриву:

$$u_y\Big|_{y=-h} \sim -4(1-\nu)\frac{P}{G}\frac{C_2}{q}\sqrt{\frac{(x-\ell_1)^3}{3\pi h^3}}, \qquad x \to \ell_1 + 0,$$

$$u_y\Big|_{y=-h} \sim -4(1-\nu)\frac{P}{G}\frac{C_1}{q}\sqrt{\frac{(\ell_1+\ell_2-x)^3}{3\pi h^3}}, \qquad x \to \ell_1 + \ell_2 - 0. \tag{32}$$

Зв'язок між асимптотичною поведінкою контактних напружень (29) і нормальних переміщень (32) узгоджується з асимптотичними розподілами напружень і переміщень поблизу краю області контакту [10]:

$$\frac{1}{2G}\sigma_x \sim A_0\sqrt{\frac{r}{h}}\left(5\sin\frac{\vartheta}{2}+\sin\frac{3\vartheta}{2}\right), \qquad \frac{1}{2G}\sigma_y \sim A_0\sqrt{\frac{r}{h}}\left(3\sin\frac{\vartheta}{2}-\sin\frac{3\vartheta}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2G}\tau_{xy} \sim A_0\sqrt{\frac{r}{h}}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}-\cos\frac{3\vartheta}{2}\right),$$

$$u_y \sim -\frac{2}{3}A_0\sqrt{\frac{r^3}{h}}\left(3\cos\frac{\vartheta}{2}+(5-8\nu)\cos\frac{3\vartheta}{2}\right),$$

$$u_x - u_x\big|_{r=0} \sim \frac{2}{3}A_0\sqrt{\frac{r^3}{h}}\left(3\sin\frac{\vartheta}{2}+(7-8\nu)\sin\frac{3\vartheta}{2}\right),$$

$$r\to 0, \quad 0\le\vartheta\le\pi. \tag{33}$$

Для правого краю ($x=\ell_1$) скінченної області контакту у формулах (33) потрібно взяти

$$A_0=\frac{P}{4Gh}\frac{C_2}{q}\sqrt{\frac{3}{\pi}}, \qquad x-\ell_1=r\cos\vartheta, \qquad y=-h+r\sin\vartheta.$$

Тоді друга та четверта з формул (33) при $\vartheta=\pi$ і $\vartheta=0$ відповідно переходять у перші з формул (29), (32). Для лівого краю ($x=\ell_1+\ell_2$) одної із напівнескінченних областей контакту в (33) візьмемо

$$A_0=\frac{P}{4Gh}\frac{C_1}{q}\sqrt{\frac{3}{\pi}}, \quad x-\ell_1-\ell_2=r\cos(\pi-\vartheta), \quad y=-h+r\sin(\pi-\vartheta)$$

і змінимо знаки при τ_{xy}, u_x на протилежні. Поклавши $\vartheta=\pi$ і $\vartheta=0$, отримаємо другі з формул (29), (32).

5. Випадок невагомої смуги. Знехтувавши власною вагою смуги ($\gamma=0$), на її нижній грані $y=-h$ матимемо одну область контакту $0\le x\le\ell_1$ і дві напівнескінченні області відриву $\ell_1<x<\infty$, $-\infty<x<0$ ($\ell_2=\infty$). Цей випадок еквівалентний випадку нескінченно великої сили, що діє на вагому смугу.

Інтегральне рівняння (4) продовжимо на два напівнескінченні інтервали $-\infty<\xi<0$, $a<\xi<\infty$ і зведемо до системи функціональних рівнянь

$$\mathcal{K}(z)\left[e^{iza}\Phi_1^+(z)+\Phi_2^-(z)\right]-\Psi_1^+(z)=F(z), \qquad \Psi_1^+(z)=e^{iza}\Psi_1^-(z),$$

$$-\infty<\operatorname{Re}z<\infty, \qquad c^+<\operatorname{Im}z<c^-, \tag{34}$$

відносно функцій $\Phi_1^+(z)$, $\Phi_2^-(z)$, $\Psi_1^\pm(z)$ із (5), де необхідно покласти $b=\infty$. При цьому

$$\Phi_1^-(z)\equiv 0, \qquad \Phi_2^+(z)\equiv 0, \qquad \Psi_2^\pm(z)\equiv 0,$$

$$F(z)=e^{iza}F_1^+(z)+F_1^-(z), \qquad F_2^\pm(z)\equiv 0, \qquad \gamma_1=0.$$

З огляду на першу і третю з умов симетрії (8) систему рівнянь (34) зведемо до першого з рівнянь (10), у якому $\Omega^-(z)\equiv 0$. Знаходимо розв'язок цього рівняння:

$$\Phi_2^-(z)=12\,\frac{\chi_1^-(z)-f^-(z)+C_1}{z^2\mathcal{K}^-(z)}, \qquad C_1=f^-(0)-\chi_1^-(0),$$

$$\Psi_1^+(z)=\mathcal{K}^+(z)\left(\chi_1^+(z)-f^+(z)+C_1\right)-e^{iza}F_1^+(z) \tag{35}$$

за першої із додаткових умов (16), у якій $\chi_2^-(z) \equiv 0$. З урахуванням цієї додаткової умови функцію $\Phi_2^-(z)$ перетворимо до вигляду

$$\Phi_2^-(z) = 12\,\frac{\tilde{\chi}_1^-(z) - \tilde{f}^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)},$$

$$\tilde{\chi}_1^-(z) = \frac{1}{z^2}\left[\chi_1^-(z) - \chi_1^-(0) - \chi_1^{-\prime}(0)z\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \Phi_1^+(is_k)}{s_k + iz},$$

$$\tilde{f}^-(z) = \frac{1}{z^2}\left[f^-(z) - f^-(0) - f^{-\prime}(0)z\right] = -q\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k'}{s_k + iz},$$

$$\alpha_k = -s_k^2\alpha_{1k}, \qquad \alpha_k' = -s_k^2\alpha_{1k}', \qquad k = 1,2,\ldots. \tag{36}$$

У розв'язку (35), (36) системи функціональних рівнянь (34) залишаються невідомими лише величини z_k, $k = 1,2,\ldots$, із (20). Поклавши $z = -is_n$ у першій з рівностей (36), для визначення z_k отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$z_n + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k z_k}{s_k + s_n} = f_n, \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{37}$$

Тут

$$\beta_n = -s_n^2\beta_{1n}, \qquad f_n = -\beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k'}{s_k + s_n}, \qquad n = 1,2,\ldots.$$

До розв'язання системи рівнянь (37), як і до (22), можна застосувати методи редукції та послідовних наближень. Крім того, якщо ввести малий параметр $\lambda = e^{-\pi a/2}$, $0 < \lambda < 1$, можна отримати розв'язок системи рівнянь (37) у вигляді рядів за степенями λ [11].

Перша з додаткових умов (16), яку запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k z_k + \alpha_k'\right) = 0,$$

слугує для визначення невідомої a.

Контактні напруження знаходимо за першою з формул (28), нормальні переміщення верхньої грані смуги над областю контакту − за першою з формул (30). Нормальні переміщення граней смуги в області відриву та над нею отримуємо у вигляді

$$u_y\big|_{y=\mp h} = A(x - \ell_1) + B + (1-\nu)\frac{P}{G}\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^{\mp} u_k\, e^{\zeta_k(a-\xi)}, \qquad \ell_1 < x < \infty,$$

$$A = 6(1-\nu)\frac{P}{Gh}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k z_k + \alpha_k'}{s_k},$$

$$\frac{B}{2h} = -ia_1 A - 6(1-\nu)\frac{P}{Gh}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k z_k + \alpha_k'}{s_k^2},$$

$$u_k = \zeta_k^2 \mathcal{K}^+(i\zeta_k)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m z_m + \alpha_m'}{s_m - \zeta_k}, \qquad k = 1,2,\ldots. \tag{38}$$

Як випливає з першої рівності з (38), з віддаленням від області контакту нормальні переміщення граней смуги з експоненціальною швидкістю стають лінійними, тобто відповідні частини смуги не деформуються і повертаються на кут A з правого боку від області контакту і на кут $-A$ − з лівого.

6. Безвідривний контакт. Розглянемо випадок, який є можливим тільки для вагомої смуги, коли зовнішньої сили P недостатньо для утворення областей відриву, і смуга контактує з жорсткою основою уздовж усієї своєї нижньої грані.

У цьому випадку розв'язок задачі на гранях смуги визначається першими двома з рівностей (3), у яких $\tilde{s}(\mu) \equiv 0$, і не потребує розв'язання інтегрального рівняння. Після перетворення відповідних інтегралів із (3) за теорією лишків згідно з (28), (30) при $\ell_1 = \infty$, $z_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, маємо

$$\sigma_y\Big|_{y=-h} = -2h\gamma - \frac{P}{4h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k \operatorname{tg}^2 s_k}{\cos s_k} e^{-s_k|\xi - a/2|},$$

$$u_y\Big|_{y=h} = \frac{1-\nu}{2G}\left(-2\gamma h^2 + P\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^2 s_k}{s_k} e^{-s_k|\xi - a/2|}\right), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{39}$$

Позначимо через P_0 граничне значення сили P, для якого у двох точках $x = 0$, $x = a'$ напруження $\sigma_y\big|_{y=-h}$ стають рівними нулеві, а в усіх інших точках залишаються від'ємними. Для безвідривного контакту маємо $P \le P_0$, а для контакту з відривом – $P > P_0$. Скориставшись необхідною умовою екстремуму функції $\sigma_y\big|_{y=-h}$ із (39), отримуємо трансцендентне рівняння

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k^2 \operatorname{tg}^2 s_k}{\cos s_k} e^{-s_k a'/2} = 0$$

для визначення невідомої a'. Після цього знаходимо

$$P_0 = -8\gamma h^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k \operatorname{tg}^2 s_k}{\cos s_k} e^{-s_k a'/2}\right)^{-1}. \tag{40}$$

Зауваження 1. Якщо позаінтегральний доданок у другій з рівностей (3) збільшити вдвічі, то ці дві перші рівності з (3) складуть подання розв'язку іншої задачі, коли смуга є невагомою, а на її верхню грань, окрім зосередженої сили P, діє рівномірно розподілений тиск інтенсивності $2\gamma h$. Тому розв'язок такої задачі на нижній грані смуги (тобто контактні напруження, нормальні переміщення в областях відриву, межі областей відриву) збігається з розв'язком розглянутої задачі, а нормальні переміщення верхньої грані смуги є на величину $(1-\nu)\gamma h^2/G$ меншими, ніж у розглянутій задачі.

7. Результати обчислень. Залежності відносних розмірів скінченної області контакту $a = \dfrac{\ell_1}{2h}$ і кожної з двох областей відриву $b = \dfrac{\ell_2}{2h}$ від безрозмірної сили $\overline{P} = \dfrac{P}{\gamma h^2}10^{-2}$ подано у табл. 1. Відрив нижньої грані смуги від жорсткої основи відбувається, якщо безрозмірна сила $\overline{P}$ перевищує значення $\overline{P}_0 = 1.76557$, обчислене за формулою (40). Області відриву стають необмеженими, а напівнескінченні області контакту зникають для нескінченно великої сили (або для невагомої смуги при $\gamma = 0$). У цьому випадку значення $a = 1.7136$ збігається зі знайденим у роботі [22]. Коли $\overline{P} = 8$, значення a і b майже не відрізняються від знайдених у роботі [17] значень $a = 2.2199$, $b = 3.1961$ для випадку дії на пружну смугу параболічного штампа, радіус кривини основи якого у вершині у 5 разів перевищує ширину смуги, а область його контакту зі смугою є малою і становить 0.0436 від ширини смуги.

Таблиця 1

$\overline{P}$	1.76557	2.4	4	8	20	200	∞
a	3.5411	2.8395	2.4561	2.2188	2.0419	1.8435	1.7136
b	0	0.9814	1.9118	3.1967	5.2768	14.053	∞

На рис. 2 і рис. 3 зображено розподіли безрозмірних нормальних напружень $\overline{\sigma} = \dfrac{h}{P}\sigma_y\Big|_{y=-h}$ у скінченній та напівнескінченній областях контакту відповідно для безрозмірної сили $\overline{P} = \overline{P}_0$ (штрихпунктирні криві), $\overline{P} = 2.4$, 4.0, 8.0, ∞ (криві ***1***–***4***). У випадку невагомої смуги ($\overline{P} = \infty$, крива ***4***) розподіл напружень $\overline{\sigma}$ збігається з отриманим у роботі [22].

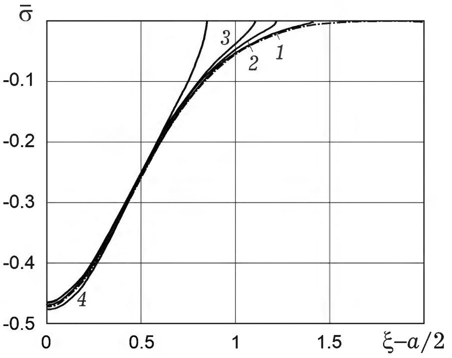

Рис. 2

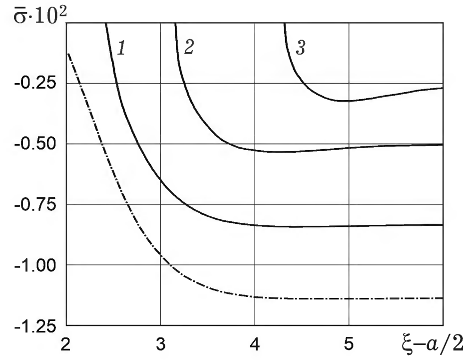

Рис. 3

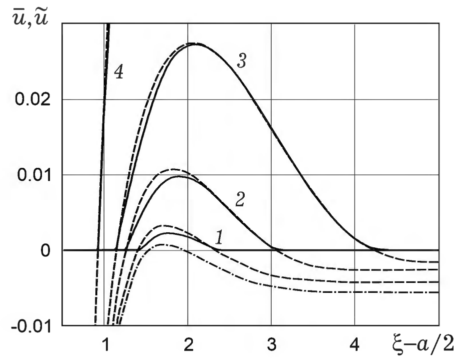

Рис. 4

На рис. 4 показано безрозмірні нормальні переміщення $\overline{u} = \dfrac{2G}{(1-\nu)P} u_y\Big|_{y=-h}$ (суцільні лінії), $\tilde{u} = \dfrac{2G}{(1-\nu)P} u_y\Big|_{y=h}$ (штрихові лінії) нижньої та верхньої граней смуги відповідно. Нумерація кривих така сама, як на рис. 2, рис. 3. Штрихпунктирна крива відповідає величині $\tilde{u}$ для $\overline{P} = \overline{P}_0$. Різниця ординат відповідних точок на кожній парі штрихової та суцільної кривих показує поперечну деформацію смуги. На ближній до лінії дії сили половині області відриву смуга є розширеною, а на дальній – поперечна деформація смуги відсутня. У скінченній області контакту смуга стиснута зосередженою силою, а у напівнескінченних – власною вагою.

1. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.

   Те саме: *Johnson K. L.* Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – xii+452 p.
2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – Москва – Ленинград: Физматгиз, 1962. – 708 с.
3. *Кіпніс О. Л., Острик В. І.* Контакт з відривом на півнескінченному проміжку пружної смуги та жорсткої основи // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 4. – С. 75–78.
4. *Манько Н. І.-В., Приварников А. К.* Відокремлення пружного шару від багатошарової основи під дією нормального навантаження // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2002. – № 1. – С. 49–53.
5. *Моргунов М. О., Острик В. І., Улітко А. Ф.* Контакт з відривом при згині пружної смуги жорстким диском // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 3. – С. 182–191.

   Те саме: *Morhunov M. O., Ostryk V. I., Ulitko A. F.* Contact with break-off under bending of an elastic strip with a rigid disk // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, No. 5. – P. 649–661. – https://doi.org/10.1007/s10958-010-0164-y.
6. *Наумов Ю. А., Никифорова В. Д.* Об отставании упругого слоя // Прикл. механика. – 1971. – **7**, № 11. – С. 33–40.

   Те саме: *Naumov Y. A., Nikiforova V. D.* On the unbonding of an elastic lamination // Sov. Appl. Mech. – 1971. – **7**, No. 11. – P. 1205–1210. – https://doi.org/10.1007/BF00887083.
7. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Контактная задача теории упругости для слоя, локально прижатого к полупространству // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1976. – **29**, Вып. 2. – С. 3–15.
8. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.

   Те саме: *Noble B.* Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon Press, 1958. – x+246 p.
9. *Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л.* Нелинейное поведение слоя, лежащего на упругом полупространстве // Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2016. – Вип. 25. – С. 146–157.
10. *Острик В. І.* Асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі краю області контакту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 4. – С. 58–71.

    Те саме: *Ostryk V. I.* Asymptotic distributions of stresses and displacements near the edge of a contact zone // J. Math. Sci. – 2019. – **238**, No. 1. – P. 63–82. – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04218-9.
11. *Острик В. І.* Метод факторизації та його узагальнення у змішаних задачах теорії пружності. – Київ: ВПЦ «Київ. ун-т», 2018. – 480 с.
12. *Острик В. І.* Часткове розкриття півнескінченної тріщини на межі пружної смуги і жорсткої стінки // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2020. – **56**, № 1. – С. 94–100.

    Те саме: *Ostryk V. I.* Partial opening of semiinfinite crack on the boundary of an elastic strip and a rigid wall // Mater. Sci. – 2020. – **56**, No. 1. – P. 97–105. – https://doi.org/10.1007/s11003-020-00402-4.
13. *Приварников А. К.* О контакте слоя с упругим полупространством // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 4. – С. 163–167.
14. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.
15. *Улітко А. Ф., Некислих К. М., Острик В. І.* Розклинювання пружного клина жорсткою пластинкою умови контакту з відставанням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 1. – С. 109–119.

    Те саме: *Ulitko A. F., Nekislykh K. M., Ostrik V. I.* Wedging of an elastic wedge by a rigid plate under conditions of contact with detaching // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 5. – P. 631–645. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0427-2.
16. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
17. *Çömez İ.* Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded layer pressed by a rigid cylindrical punch // Europ. J. Mech. A-Solids. – 2019. – **73**. – P. 437–448. – https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.10.009.
18. *Filon L. N. G.* On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, with special references to points of

concentrated or discontinuous loading // Phil. Trans. R. Soc. London. – 1903. – A**201**. – P. 63–155. – https://www.jstor.org/stable/90898.
19. *Hussain M. A., Pu S. L.* A variational principle for singular integral equations with bounded solutions // Int. J. Eng. Sci. – 1973. – **11**, No. 7. – P. 767–781. – https://doi.org/10.1016/0020-7225(73)90005-0.
20. *Keer L. M., Dundurs J., Tsai K. C.* Problems involving a receding contact between a layer and a half space // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 1972. – **39**, No. 4. – P. 1115–1120. – https://doi.org/10.1115/1.3422839.
21. *Pu S. L., Hussain M. A.* Note on the unbonded contact between plates and an elastic half space // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 1970. – **37**, No. 3. – P. 859–861. – https://doi.org/10.1115/1.3408622.
22. *Ratwani M., Erdogan F.* On the plane contact problem for a frictionless elastic layer // Int. J. Solids Struct. – 1973. – **9**, No. 8. – P. 921–936. – https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90021-8.

RECEDING OF AN ELASTIC WEIGHTY STRIP FROM A RIGID BASE UNDER THE ACTION OF A NORMAL CONCENTRATED FORCE

The smooth contact of an elastic strip with a rigid base under the action of a normal concentrated force is considered. The own weight of the strip and the formation of two domains of its receding from the base are taken into account. An analytical solution to the problem is obtained using the Wiener – Hopf method. The smallest value of the external force necessary for the emergence of receding domains is determined. The size and location of the receding domains, contact stress distributions and normal displacements of the strip faces are found.

Key words: *elastic strip, own weight, stresses, contact with receding, Wiener – Hopf method.*

Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано
21.02.23