

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРИ ДІЇ ХВИЛЯМИ НА СИСТЕМУ ТРІЩИН

Розв'язано задачу визначення двовимірного напруженого стану в пружному ізотропному тілі з системою довільно розміщених тріщин при взаємодії з хвилями. Розв'язання ґрунтується на зведенні вихідної задачі до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень на поверхнях тріщин. Для розв'язання цієї системи запропоновано ітераційний метод. Цей метод дозволяє уникнути труднощів, пов'язаних із необхідністю розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь великої розмірності. Розглянуті приклади демонструють збіжність і стійкість методу також і у випадку систем щільно розміщених тріщин складної конфігурації.

Ключові слова: хвилі, тріщини, сингулярні інтегральні рівняння, метод ітерацій.

Вступ. Проблему визначення полів переміщень і напружень, спричинених дією на окрему тріщину хвиль, що поширюються в пружному середовищі, на теперішній час можна вважати цілком вирішеною. Ситуація значно ускладнюється при наявності в тілі системи довільно розташованих тріщин. Ефективним і поширеним методом визначення хвильових полів і напруженого стану в тілах із тріщинами є метод граничних інтегральних рівнянь і його дискретний аналог – метод граничних елементів [2, 4–6, 9, 15, 19, 21]. Але при застосуванні цих методів у випадку наявності системи довільно розміщених тріщин виникають технічні труднощі, які полягають у розв'язанні систем сингулярних інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь, коли кількість рівнянь пропорційна кількості тріщин. Тому в перших роботах з цього напрямку визначали двовимірний динамічний напружений стан у тілах із декількома паралельними тріщинами [8, 11–13, 17]. Уникнути труднощів, пов'язаних з числовим розв'язанням системи сингулярних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь великої розмірності вдається і при розгляді періодичних систем тріщин [3, 14, 20]. Дослідження впливу хвильової дії на коефіцієнти інтенсивності напружень двох довільно розміщених тріщин здійснено в [7, 18]. Двовимірні задачі взаємодії хвиль з довільними системами прямолінійних тріщин розглянуто у [5, 10, 16, 21]. Методикою розв'язування задач в усіх цих статтях було зведення вихідних задач до систем інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь. І хоча розв'язки наведено за загальної постановки, числові результати авторами отримано для випадків систем із декількох, найчастіше двох, тріщин. Тому у випадку значної кількості тріщин актуальною є проблема створення такого методу розв'язання, який дозволить уникати необхідності розв'язувати системи інтегральних рівнянь великої розмірності. В [1], де розв'язано задачу дифракції SH -хвиль на довільній системі прямолінійних тріщин, запропоновано у таких випадках отриману систему інтегро-диференціальних рівнянь розв'язувати ітераційним методом. Це приводить до розв'язання на кожній ітерації сукупності рівнянь для окремих тріщин. У пропонованій роботі цей метод поширюємо на взаємодію P - і SV -хвиль з довільною системою прямолінійних тріщин.

1. Постановка задачі і зведення її до систем інтегро-диференціальних рівнянь. Нехай пружний простір, що знаходиться у стані плоскої деформації, містить N наскрізних тріщин. Ці тріщини в площині Oxy (рис. 1) розміщені на відрізках довжини $2d_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, які не перетинаються і

✉ dr.vg.popov@gmail.com

мають центри у точках $O_k(a_k, b_k)$. У просторі поширюються і взаємодіють із тріщинами плоскі гармонічні хвилі.

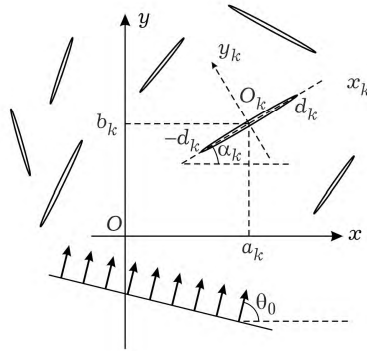


Рис. 1

Це можуть бути поздовжні P -хвилі, які викликають переміщення

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= Ae_1(x, y) \cos \theta_0, \\ v_0(x, y) &= Ae_1(x, y) \sin \theta_0, \end{aligned} \quad (1)$$

або SV -хвилі поперечного зсуву, що спричиняють переміщення

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= Be_2(x, y) \sin \theta_0, \\ v_0(x, y) &= -Be_2(x, y) \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (2)$$

У формулах (1), (2) позначено

$$\begin{aligned} e_j(x, y) &= \exp(i\alpha_j(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)), \quad j = 1, 2, \\ \alpha_j^2 &= \omega^2 c_j^{-2}, \quad c_1 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}, \quad c_2 = \mu\rho^{-1}, \end{aligned}$$

де ω – частота коливань, ρ – густина пружного матеріалу, λ , μ – коефіцієнти Ляме, θ_0 – кут між напрямком поширення хвилі та віссю Ox (рис. 1). Множник $e^{-i\omega t}$, який визначає залежність від часу, в (1), (2) і всюди надалі відкидаємо.

Нехай $u(x, y)$, $v(x, y)$ – переміщення розсіяного тріщинами хвильового поля. Тоді вони повинні задовольняти рівняння руху, які в умовах плоскої деформації мають вигляд

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta u &= -\rho \omega^2 u, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta v &= -\rho \omega^2 v. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут Δ – двовимірний оператор Лапласа.

Систему рівнянь (3) необхідно доповнити граничними умовами на поверхнях тріщин. Щоб їх сформулювати, з кожною тріщиною пов'яжемо локальну систему координат $O_k x_k y_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Нехай $u^k(x_k, y_k)$, $v^k(x_k, y_k)$, $\tau_{yx}^k(x_k, y_k)$, $\sigma_y^k(x_k, y_k)$, $\sigma_x^k(x_k, y_k)$ – переміщення і напруження розсіяного хвильового поля, а $u^{0k}(x_k, y_k)$, $v^{0k}(x_k, y_k)$, $\tau_{yx}^{0k}(x_k, y_k)$, $\sigma_y^{0k}(x_k, y_k)$, $\sigma_x^{0k}(x_k, y_k)$ – переміщення і напруження хвилі, що діє на тріщини, в системі координат, пов'язаній з k -ю тріщиною. Тоді на кожній із тріщин, за відсутності навантаження, повинні виконуватися рівності

$$\begin{aligned}\sigma_y^k(x_k, 0) &= -\sigma_y^{0k}(x_k, 0), \\ \tau_{yx}^k(x_k, 0) &= -\tau_{yx}^{0k}(x_k, 0), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (4)$$

Крім того, на поверхнях тріщин переміщення $u^k(x_k, y_k)$, $v^k(x_k, y_k)$ мають розриви з невідомими стрибками:

$$\begin{aligned}v^k(x_k, +0) - v^k(x_k, -0) &= \chi_{3k}(x_k), \\ u^k(x_k, +0) - u^k(x_k, -0) &= \chi_{4k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (5)$$

При так означених умовах необхідно визначити напружений стан в околах тріщин. Для цього, як і в [10], використаємо розривні розв'язки рівнянь (3) зі стрибками переміщень (5), побудовані для кожної тріщини у пов'язаній з нею системі координат:

$$\begin{aligned}v^{d\ell}(x_\ell, y_\ell) &= \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{3\ell}(\eta) G_{33}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta + \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{4\ell}(\eta) G_{34}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta, \\ u^{d\ell}(x_\ell, y_\ell) &= \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{3\ell}(\eta) G_{43}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta + \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{4\ell}(\eta) G_{44}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta,\end{aligned}\quad (6)$$

де

$$\begin{aligned}G_{33} &= \frac{1}{x_2^2} \frac{\partial}{\partial y_\ell} \left[\left(x_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \right) r_1 - \frac{\partial^2 r_2}{\partial x_\ell^2} \right], \\ G_{34} &= \frac{1}{x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[2 \left(x_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \right) r_1 - \left(x_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \right) r_2 \right], \\ G_{43} &= \frac{1}{x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\left(x_1^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \right) r_1 - 2 \left(x_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \right) r_2 \right], \\ G_{44} &= \frac{1}{x_2^2} \frac{\partial}{\partial y_\ell} \left[-2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial x_\ell^2} + \left(x_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \right) r_2 \right], \\ r_j(\eta - x_\ell, y_\ell) &= -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(x_j \sqrt{(\eta - x_\ell)^2 + y_\ell^2} \right), \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

Переміщення, які визначаються формулами (6), зумовлюють у пружному просторі напруження

$$\begin{aligned}\sigma_x^{d\ell}(x_\ell, y_\ell) &= \mu \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi'_{3\ell}(\eta) E_{03}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta + \mu \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi'_{4\ell}(\eta) E_{04}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta + \\ &\quad + \mu(x_2^2 - 2x_1^2) \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{3\ell}(\eta) r_1(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta, \\ \sigma_y^{d\ell}(x_\ell, y_\ell) &= \mu \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi'_{3\ell}(\eta) E_{13}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta + \mu \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi'_{4\ell}(\eta) E_{14}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta - \\ &\quad - \mu x_2^2 \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{3\ell}(\eta) r_1(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yx}^{d\ell}(x_\ell, y_\ell) = & \mu \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi'_{3\ell}(\eta) E_{23}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta + \mu \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi'_{4\ell}(\eta) E_{24}(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta - \\ & - \mu \mathbf{x}_2^2 \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{4\ell}(\eta) r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta. \end{aligned} \quad (7)$$

При виведенні формул (7) з метою зниження порядку сингулярності інтегралів було здійснено інтегрування частинами з урахуванням, що $\chi_\ell(\pm d_\ell) = 0$, і прийнято такі позначення:

$$\begin{aligned} E_{03} = E_{24} &= -\frac{4}{\mathbf{x}_2^2} \left[\left(\mathbf{x}_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial \eta} - \left(\mathbf{x}_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_2}{\partial \eta} \right], \\ E_{04} &= -\frac{2}{\mathbf{x}_2^2} \left[\left(2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_2^2 \right) \frac{\partial r_1}{\partial y_\ell} - \left(2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \mathbf{x}_2^2 \right) \frac{\partial r_2}{\partial y_\ell} \right], \\ E_{13} &= \frac{4}{\mathbf{x}_2^2} \left[\left(\mathbf{x}_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial \eta} - \left(\mathbf{x}_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_2}{\partial \eta} \right], \\ E_{14} = E_{23} &= \frac{2}{\mathbf{x}_2^2} \left[\left(\mathbf{x}_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial y_\ell} - \left(\mathbf{x}_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_2}{\partial y_\ell} \right]. \end{aligned}$$

У системі координат $Ox_\ell y$ кожен розривний розв'язок (6), (7) визначає такі переміщення та напруження:

$$\begin{aligned} u^{g\ell} &= u^{d\ell} \cos \alpha_\ell - v^{d\ell} \sin \alpha_\ell, & v^{g\ell} &= u^{d\ell} \sin \alpha_\ell + v^{d\ell} \cos \alpha_\ell, \\ \sigma_x^{g\ell} &= \sigma_x^{d\ell} \cos^2 \alpha_\ell + \sigma_y^{d\ell} \sin^2 \alpha_\ell - \tau_{xy}^{d\ell} \sin 2\alpha_\ell, \\ \sigma_y^{g\ell} &= \sigma_x^{d\ell} \sin^2 \alpha_\ell + \sigma_y^{d\ell} \cos^2 \alpha_\ell + \tau_{xy}^{d\ell} \sin 2\alpha_\ell, \\ 2\tau_{yx}^{g\ell} &= \sigma_x^{d\ell} \sin 2\alpha_\ell + \sigma_y^{d\ell} \sin 2\alpha_\ell + 2\tau_{xy}^{d\ell} \cos 2\alpha_\ell, \end{aligned}$$

де α_ℓ – кути між осями Ox_ℓ та Ox .

Тепер переміщення, зумовлені розсіяною хвилею, можемо подати у вигляді

$$u(x, y) = \sum_{\ell=1}^N u^{g\ell}(x, y), \quad v(x, y) = \sum_{\ell=1}^N v^{g\ell}(x, y). \quad (8)$$

У подібному вигляді подаємо і напруження σ_x , σ_y , τ_{xy} . Формули (8) дозволяють знаходити переміщення і напруження розсіяного хвильового поля за умови визначених невідомих стрибків (5). Для цього напруження, що входять до граничних умов (4), подаємо через розривні розв'язки (7) за такими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_y^k(x_k, y_k) &= \sum_{\ell=1}^N \sigma_y^{k\ell}(x_k, y_k), & \tau_{yx}^k(x_k, y_k) &= \sum_{\ell=1}^N \tau_{yx}^{k\ell}(x_k, y_k), \\ \sigma_y^{k\ell} &= \sigma_x^{d\ell} \sin^2 \alpha_{k\ell} + \sigma_y^{d\ell} \cos^2 \alpha_{k\ell} - \tau_{yx}^{d\ell} \sin 2\alpha_{k\ell}, \\ 2\tau_{yx}^{k\ell} &= -\sigma_x^{d\ell} \sin 2\alpha_{k\ell} + \sigma_y^{d\ell} \sin 2\alpha_{k\ell} + 2\tau_{yx}^{d\ell} \cos 2\alpha_{k\ell}, \\ \alpha_{k\ell} &= \alpha_k - \alpha_\ell. \end{aligned}$$

Підстановка виразів (8) для напружень у граничні умови (4) приводить до системи $2N$ сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень. Після вилучення сингулярної складової та ряду перетворень цю систему зводимо до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi'_{3k}(\tau) \left[-\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_{3k}(\tau) \left[\alpha_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\
& + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi'_{3k}(\tau) F_{k\ell}^{13}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi'_{4k}(\tau) F_{k\ell}^{14}(\tau, \zeta) d\tau \right] + \\
& + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_{3k}(\tau) U_{k\ell}^{13}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_{4k}(\tau) U_{k\ell}^{14}(\tau, \zeta) d\tau \right] = \\
& = f_{1k}(\zeta), \\
& \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi'_{4k}(\tau) \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_{4k}(\tau) \left[\alpha_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\
& + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi'_{3k}(\tau) F_{k\ell}^{23}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi'_{4k}(\tau) F_{k\ell}^{24}(\tau, \zeta) d\tau \right] + \\
& + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_{3\ell}(\tau) U_{k\ell}^{23}(\tau, \zeta) d\tau + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_{4k}(\tau) U_{k\ell}^{24}(\tau, \zeta) d\tau \right] = f_{2k}(\zeta), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)
\end{aligned}$$

У системі рівнянь (9) прийнято позначення: $\phi_{sk}(\tau) = d_k^{-1} \chi_{sk}(d_k \tau)$, $s = 3, 4$, $k = 1, 2, \dots, N$, $\gamma_k = \frac{d_k}{d}$, $d = \max(d_1, d_2, \dots, d_N)$, $\xi^2 = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$, ν – коефіцієнт Пуассона пружного матеріалу,

$$f_{1k}(\zeta) = -\mu^{-1} \sigma_y^{0k}(d_k \zeta, 0), \quad f_{2k}(\zeta) = -\mu^{-1} \tau_{yx}^{0k}(d_k \zeta, 0).$$

Функції R_{js}^k , V_{js}^k , $F_{k\ell}^{js}$, $U_{k\ell}^{js}$, $j = 1, 2$, $s = 3, 4$, $\ell, k = 1, 2, \dots, N$, є неперервними в області $-1 \leq \zeta, \tau \leq 1$. Систему (9) необхідно розглядати сумісно з рівностями

$$\int_{-1}^1 \phi'_{sk}(\tau) d\tau = 0, \quad s = 3, 4, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

які є наслідком умови замкнутості тріщин.

2. Ітераційний метод розв'язування. Систему інтегро-диференціальних рівнянь (9) необхідно розв'язувати числовим методом. Щоб уникнути розв'язування системи великої розмірності у випадку значної кількості тріщин, пропонуємо застосувати ітераційний метод, аналогічний до викладеного в [1]. Цей метод полягає в тому, що за нульове наближення $\varphi_{3k}^0(\tau)$, $\varphi_{4k}^0(\tau)$, $k = 1, 2, \dots, N$, приймаємо розв'язок сукупності N пар незалежних рівнянь для N окремих поодиноких тріщин:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{3k}^0(\tau))' \left[-\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3k}^0(\tau) \left[\alpha_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau = f_{1k}(\zeta), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{4k}^0(\tau))' \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{4k}^0(\tau) \left[\alpha_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau = f_{2k}(\zeta), \\ & \qquad \qquad \qquad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

Наступні ітерації $i = 1, 2, \dots$ знаходимо шляхом розв'язання на кожному кроці такої сукупності $2N$ рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{3k}^i(\tau))' \left[-\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3k}^i(\tau) \left[\alpha_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau = \\ & \quad = f_k(\zeta) - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \sum_{s=3}^4 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{s\ell}^{i-1}(\tau))' F_{k\ell}^{1s}(\tau, \zeta) d\tau + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{s\ell}^{i-1}(\tau) U_{k\ell}^{1s}(\tau, \zeta) d\tau \right], \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{4k}^i(\tau))' \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{4k}^i(\tau) \left[\alpha_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau = \\ & \quad = f_{2k}(\zeta) - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \sum_{s=3}^4 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{s\ell}^{i-1}(\tau))' F_{k\ell}^{2s}(\tau, \zeta) d\tau + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{s\ell}^{i-1}(\tau) U_{k\ell}^{2s}(\tau, \zeta) d\tau \right], \\ & \qquad \qquad \qquad k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Чисельне розв'язання рівнянь (11), (12) здійснюємо аналогічно, як в [1]. Для цього похідні від невідомих функцій з урахуванням кореневої особливості подаємо у вигляді

$$(\varphi_{sk}^{(i)}(\tau))' = \frac{\psi_{sk}^{(i)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

після чого нові невідомі функції $\psi_{sk}^{(i)}(\tau)$ апроксимуємо інтерполяційними многочленами

$$\psi_{sk}^{(i)}(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{skm}^{(i)} \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau)}, \quad \psi_{skm}^{(i)} = \psi_{sk}^{(i)}(\tau_m),$$

де $T_n(\tau)$ – многочлени Чебишова другого роду, а τ_m , $m = 1, 2, \dots, n$, – корені цього многочлена.

Далі з (10), (11), (12) методом механічних квадратур отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень похідних від невідомих функцій у вузлах інтерполяції $\psi_{skm}^{(i)}$.

Важливою характеристикою напруженого стану є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН). Після розв'язання рівнянь (11), (12) наближене значення коефіцієнтів інтенсивності нормальних і дотичних напружень за результатами i -ї ітерації визначаються формулами:

$$\begin{aligned} K_{p\ell}^{(i)\pm} &= \mu\sqrt{d} k_{p\ell}^{(i)\pm}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N, \quad p = 1, 2, \\ k_{p\ell}^{(i)+} &= -(1 - \xi^2)n^{-1} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{2+p\ell m}^{(i)} \operatorname{ctg}(0.5\beta_m), \\ k_{p\ell}^{(i)-} &= -(1 - \xi^2)n^{-1} (-1)^{p+n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{2+p\ell m}^{(i)} \operatorname{tg}(0.5\beta_m), \\ \beta_m &= \frac{\pi(2m-1)}{2n}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

У формулах (13) знак «-» відповідає значенню КІН в околі вершини ℓ -ї тріщини з координатами $(-d_\ell, 0)$, а «+» – значенню КІН в околі вершини $(d_\ell, 0)$ у системі $O_\ell x_\ell y_\ell$.

3. Аналіз числових результатів. При числовій реалізації ставилась мета дослідити практичну збіжність ітераційного методу і з'ясувати спроможність аналізувати динамічний напружений стан у тілах із системою тріщин. Для порівняння результатів, отриманих при безпосередньому розв'язанні системи (9) [1] і застосуванні ітераційного методу, розглядали систему трьох тріщин однакової довжини, розміщених так, як показано на рис. 2. На тріщини діє поздовжня SV -хвиля (1) з фронтом, паралельним до осі Ox ($\theta_0 = 90^\circ$).

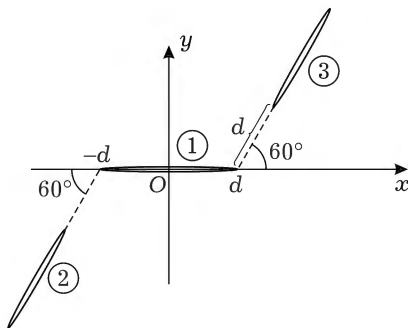


Рис. 2

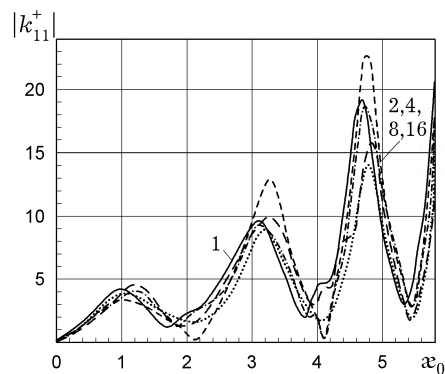


Рис. 3

Розраховували КІН нормальних напружень $|k_{11}^+|$ за формулами (13) при зміні хвильового числа $\alpha_0 = \alpha_2 d$. Результати обчислень наведено у вигляді графіків на рис. 3. Суцільні криві пронумеровано відповідно до кількості ітерацій, за якими обчислено КІН. Кривій, зображеній крапками, відповідає значення КІН, отримане шляхом безпосереднього розв'язання системи шести інтегро-диференціальних рівнянь (9) [1]. Пунктирна крива 1 відповідає випадку поодинокій тріщини під дією такої самої хвилі. Як бачимо, вже після 2-ї ітерації уточнення значень КІН майже не відбувається. Результати, отримані ітераційним методом, добре узгоджуються з отриманими шляхом безпосереднього розв'язання системи (9). Деякі незначні розбіжності спостерігаємо для екстремальних значень КІН.

Далі розглядали систему семи тріщин, конфігурацію якої показано на рис. 4. Результати розрахунків $|k_{11}^+|$ зображено на рис. 5. Штрихова крива 1 відповідає значенню $|k_{11}^+|$ для поодинокій тріщини. Інші криві $|k_{11}^+|$ пронумеровано відповідно до кількості ітерацій, за якими виконано обчислення кривих. Наведені результати ілюструють добру збіжність ітераційного методу: після 16-ти ітерацій уточнення результатів вже не відбувається.

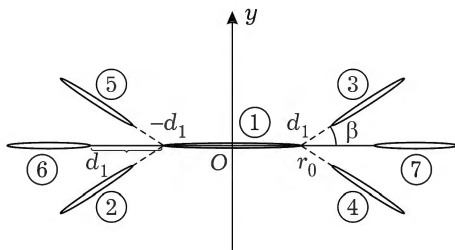


Рис. 4

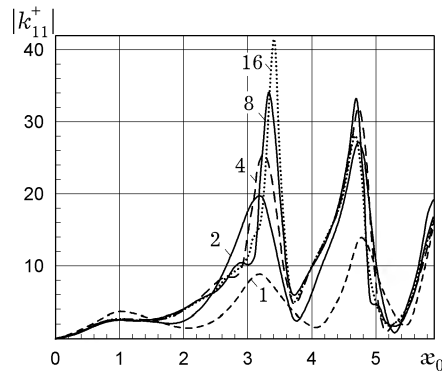


Рис. 5

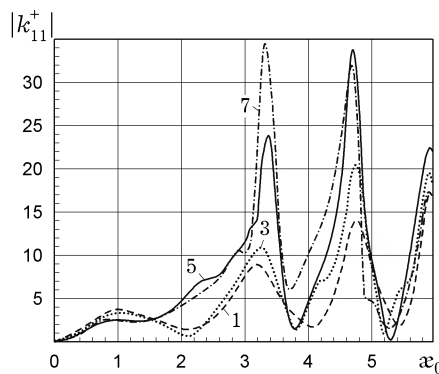


Рис. 6

Також досліджено вплив кількості тріщин, із яких складається система, та її конфігурації на значення КІН. Розглянуто (рис. 4) окрему тріщину 1, систему трьох тріщин 1-3, з п'яти і семи тріщин (з кутом $\beta = 30^\circ$). Криві 1-7 на рис. 6 ілюструють залежність КІН $|k_{11}^+|$ від хвильового числа. Із цих результатів, а також результатів, наведених на рис. 3 та рис. 5, можемо бачити, що частоти, при яких спостерігаються максимальні за амплітудою значення КІН, практично не залежать від кількості тріщин у системі та її конфігурації. Зате спостерігаємо істотне (\approx у три рази) збільшення цих максимальних значень внаслідок взаємодії близько розміщених тріщин.

Висновки. Показано, що двовимірні дифракційні поля при дії хвиль на систему довільно розташованих тріщин можна визначати ітераційним методом. Цей метод не вимагає розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь великої розмірності, а ґрунтується на розв'язанні сукупності окремих рівнянь на кожному кроці ітерації. Кількість цих рівнянь визначається кількістю тріщин у системі, причому на різних кроках ітерації рівняння відрізняються тільки правими частинами. Числові приклади демонструють, що запропонований метод є збіжним і стійким у випадку систем достатньо щільно розміщених тріщин складної конфігурації.

Встановлено, що кількість тріщин у системі та їхня конфігурація майже не впливають на частоти, при яких спостерігається максимальне за амплітудою значення КІН. Але самі ці значення в результаті взаємодії близько розміщених тріщин можуть у декілька разів перевищувати значення КІН для окремих тріщин.

1. *Попов В. Г.* Ітераційний метод визначення дифракційного поля при взаємодії хвилі поздовжнього зсуву з системою тріщин // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – **54**, № 1. – С. 204–211.
 The same: *Popov V. G.* Iterative method for the determination of a diffraction field in the interaction of a longitudinal shear wave with a system of cracks // *J. Math. Sci.* – 2012. – **183**, No. 2. – P. 241–251.
 – <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0810-7>.
2. *Ang W. T., Clements D. L., Dehghan M.* Scattering and diffraction of SH waves by multiple planar cracks in an anisotropic half-space: A hypersingular integral formulation // *Int. J. Solids Struct.* – 1993. – **30**, No. 10. – P. 1301–1312.
 – [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90213-Q](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90213-Q).
3. *Angel Y. C., Achenbach J. D.* Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1985. – **52**, No. 1. – P. 33–41. – <https://doi.org/10.1115/1.3169023>.
4. *Bouchon M., Sánchez-Sesma F. J.* Boundary integral equations and boundary elements in elastodynamics // *Adv. Geophys.* – 2007. – **48**. – С. 157–189.
 – [https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(06\)48003-1](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(06)48003-1).
5. *Chirino F., Dominguez J.* Dynamic analysis of cracks using boundary element method // *Eng. Fract. Mech.* – 1989. – **34**, No. 5–6. – P. 1051–1061.
 – [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(89\)90266-X](https://doi.org/10.1016/0013-7944(89)90266-X).
6. *Gross D., Zhang Ch.* Diffraction of SH waves by a system of cracks: Solution by an integral equation method // *Int. J. Solids Struct.* – 1988. – **24**, No. 1. – P. 41–49.
 – [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90097-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90097-2).
7. *Huang J. Y., So H.* Diffraction of P waves by two cracks at arbitrary position in an elastic medium // *Eng. Fract. Mech.* – 1988. – **29**, No. 3. – P. 335–347.
 – [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(88\)90021-5](https://doi.org/10.1016/0013-7944(88)90021-5).
8. *Jain D. L., Kanval R. P.* Diffraction of elastic waves by two coplanar Griffith cracks in an infinite elastic medium // *Int. J. Solids Struct.* – 1972. – **8**, No. 7. – P. 961–975. – [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(72\)90009-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(72)90009-1).
9. *Liu E., Zhang Z.* Numerical study of elastic wave scattering by cracks or inclusions using the boundary integral equation method // *J. Comput. Acoust.* – 2001. – **9**, No. 3. – P. 1039–1054. – <https://doi.org/10.1142/S0218396X01001315>.
10. *Popov V. G.* System of cracks under the impact of plane elastic waves // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2022. – **2231**. – Article No. 012004.
 – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012004>.
11. *Sarkar J., Mandal S. C., Ghosh M. L.* Diffraction of elastic waves by three coplanar Griffith cracks in an orthotropic medium // *Int. J. Eng. Sci.* – 1995. – **33**, No. 2. – P. 163–177. – [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00059-S](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00059-S).
12. *Sarkar J., Mandal S. C., Ghosh M. L.* Four coplanar Griffith cracks moving in an infinitely long elastic strip under antiplane shear stress // *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*. – 1996. – **106**, No. 1. – P. 91–103.
 – <https://doi.org/10.1007/BF02837190>.
13. *Sarkar J., Mandal S. C., Ghosh M. L.* Interaction of elastic waves with two coplanar Griffith cracks in an orthotropic medium // *Eng. Fract. Mech.* – 1994. – **49**, No. 3. – P. 411–423. – [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)90269-0](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)90269-0).
14. *Scarpetta E.* In-plane problem for wave propagation through elastic solids with a periodic array of cracks // *Acta Mech.* – 2002. – **154**, Nos. 1–4. – P. 179–187.

- <https://doi.org/10.1007/BF01170706>.
15. *Sládek J., Sládek V.* A boundary integral equation method for dynamic crack problems // *Eng. Fract. Mech.* – 1987. – **27**, No. 3. – P. 269–277. – [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90145-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90145-7).
 16. *Takakuda K.* Diffraction of plane harmonic waves by cracks // *Bull. JSME.* – 1983. – **26**, No. 214 – P. 478–493. – <https://doi.org/10.1299/jsme1958.26.487>.
 17. *Trivedi N., Das S., Altenbach H.* Study of collinear cracks in a composite medium subjected to time-harmonic wave disturbance // *ZAMM J. Appl. Math. Mech.* – 2021. – **101**, No. 6. – e202000307. – <https://doi.org/10.1002/zamm.202000307>.
 18. *Tsai Ch.-H., Ma Ch.-Ch.* The interaction of two inclined cracks with dynamic stress wave loading // *Int. J. Fract.* – 1992. – **58**, No. 1. – P. 77–91. – <https://doi.org/10.1007/BF00019752>.
 19. *Wang Y.-B., Sun Y.-Zh.* A new boundary integral equation method for for cracked 2-D anisotropic bodies // *Eng. Fract. Mech.* – 2005. – **72**, No. 13. – P. 2128–2143. – <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.01.007>.
 20. *Zhang C.* Dynamic stress intensity factor of collinear periodic antiplane cracks // *J. Tongji Univ.* – 1990. – **18**, No. 4. – P. 445–451.
 21. *Zhang Ch., Gross D.* The solution of plane problems of wave loaded cracks by an integral equation method // *ZAMM J. Appl. Math. Mech.* – 1988. – **68**, No. 7. – P. 299–305. – <https://doi.org/10.1002/zamm.19880680705>.

ITERATIVE METHOD FOR DETERMINING THE STRESS STATE UNDER THE ACTION OF WAVES ON A SYSTEM OF CRACKS

The problem on the determining the two-dimensional stress state in an elastic isotropic body with a system of arbitrary located cracks during interaction with waves is solved. The solution is based on reducing the original problem to a system of singular integro-differential equations for displacement jumps on cracks surfaces. An iterative method to solve this system is proposed. The method avoids the difficulties related with the need to numerically solve systems of high-dimensional integro-differential equations. The considered examples prove the convergence and stability of the proposed method in the case of systems of closely situated cracks of complex configuration.

Key words: waves, cracks, singular integral equations, iteration method.

Нац. ун-т «Одеська морська акад.», Одеса

Одержано
12.03.23