

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В КРУГОВОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ КАНАЛІ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ, ЗАПОВНЕНОМУ ДИСПЕРГОВАНОЮ МАСОЮ, ЯКА ПЕРЕНОСИТЬСЯ ВНАСЛІДОК ОБЕРТАННЯ ІНДУКЦІЙНО НАГРІТОЇ ГЕЛІСИ

Проведено аналіз розподілу температурного поля в циліндричному круговому каналі скінченної довжини, заповненому дисперсною масою, яка рухається в осьовому напрямку з постійною швидкістю внаслідок обертання індукційно нагрітої геліси. Припускається, що вздовж геліси неперервним чином розподілені точкові джерела тепла. Вважається, що бічна поверхня каналу теплоізолювана, а на його вході і на виході виконуються граничні умови третього роду для температури. Для розв'язування відповідної задачі теплопровідності застосовано метод розвинень шуканої функції в ряди Фур'є – Бесселя за кутовою і радіальною змінними, а також інтегральне перетворення Лапласа за часом. Послідовність диференціальних рівнянь у трансформантах розв'язано шляхом заміни невідомих функцій таким чином, щоб неоднорідні звичайні диференціальні рівняння перейшли в однорідні. Внаслідок переходу до оригіналів одержано точний розв'язок задачі, який з практичних міркувань обчислювального характеру замінюється наближеним розв'язком. Виконано детальний числовий аналіз просторових і часових характеристик температурного поля. Показано, що в цій задачі тривалість перехідного процесу є обернено пропорційною до квадрата швидкості руху маси, а амплітуди коливань температури у квазістаціонарному режимі досить слабкі. Проте ці коливання чітко проявляються тоді, коли їх аналізувати в певних напрямках, а особливо в умовах просторово-часового резонансу при відповідно підібраних швидкостях обертання геліси і прямолінійного руху диспергованої маси. Також встановлено ефект локального підвищення температури при малих швидкостях руху маси.

Ключові слова: шнековий реактор, геліса, електричне нагрівання, нестационарне температурне поле, математичне моделювання, числовий аналіз.

Вступ. Шнекові системи без валу часто застосовують у техніці, зокрема, в реакторах, в яких відбуваються процеси піролізу, стерилізації або пастеризації харчових інгредієнтів [5]. При цьому шнек нагрівається струмом низької напруги [28]. Використання шнека без валу піролізного реактора безперервної дії є вигідним в енергетичному плані завдяки зменшенню ваги. Якщо ж відбувається транспортування липких, в'язких або жилованих матеріалів, тоді також вигідно застосовувати безвальний шнек у вигляді спірального черв'ячного гвинта, що обертається [6, 16, 24–26].

За останні роки збільшилися потреби у математичному моделюванні термохімічних процесів у шнекових реакторах, призначених для піролітичного перетворення біомаси на біовугілля [3, 4, 17, 18, 30, 31]. При цьому в багатьох випадках значна увага відводиться розрахунку процесів нагрівання в реакторі зі шнеком без валу [8, 23, 29]. Так, в роботі [15] побудовано одновимірну числову модель опису розподілу температури і теплового потоку при термохімічному перетворенні біомаси в умовах швидкого піролізу в безвальній шнековому піролізаторі, стінки якого підтримуються при сталій температурі. Подібно в роботі [11] досліджено та оптимізовано процес безперервної реакції піролізу біомаси із застосуванням спіральних шнеків зі змінним кроком і з різними поперечними перерізами спіралі. У статті [32] наведено математичне моделювання процесу піролізу бурового шламу на основі нафти в реакторі зі спіральним шнеком. Використання однієї чи

 piddub@wp.pl

DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.1-2.103-125

ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2024. – 67, № 1-2. – С. 103-125. 103

декількох додаткових спіралей або спіральних смуг у прямому чи проти-лежному напрямках потоку матеріалу на периферії спірального шнекового слимака з метою покращення змішування матеріалу в конвеєрі досліджу-валось на основі методу дискретних елементів в роботі [21].

Важливим є тривимірне моделювання нестационарного температурного поля в реакторі, коли джерелом тепла є геліса, що індукційно нагрівається внаслідок ефекту Джоуля – Ленца, оскільки такі системи мають застосу-вання на практиці. У попередній статті [22] авторами було побудовано таку математичну модель для випадку теплоізольованого кругового циліндрич-ного каналу нескінченної довжини, заповненого біомасою, що рухається за допомогою обертання електрично нагрітої геліси.

У цій статті розглядаємо подібну задачу для випадку каналу скінчен-ної довжини з теплоізольованою бічною поверхнею і граничними умовами теплообміну третього роду на вході і на виході реактора. Як і в праці [22], тут необхідно знайти розв’язок рівняння теплопровідності з урахуванням конвективного члена, що містить швидкість руху біомаси, і на основі побу-дованого алгоритму чисельно проаналізувати залежність просторово-ча-сового розподілу температури в системі від її параметрів.

1. Формулювання задачі. Розглянемо круговий циліндричний канал радіуса R_1 і довжини L , в якому зі сталою швидкістю v_0 рухається в осьовому напрямі Oz біомаса (псевдозріджена суміш), густина якої ρ , теп-лоємність c_p і коефіцієнт теплопровідності λ . Джерелом руху маси є геліса з радіусом R_0 , що обертається з кутовою швидкістю ω (див. рис. 1: верхній рисунок – це фрагмент шнека [16], а нижні рисунки – осьовий і радіальний перерізи системи). Припускаємо, що геліса прикріплена на валах поза реак-тором. Геліса є джерелом тепла, оскільки вона індукційно нагрівається внаслідок термоелектричного ефекту Джоуля – Ленца зі сталою силою струму I . Припускаємо також, що поверхня каналу теплоізольована, а на вході і на виході каналу виконуються граничні умови теплообміну третього роду. У початковий момент часу $\tau = 0$ температура суміші в каналі дорів-нює T_0 .

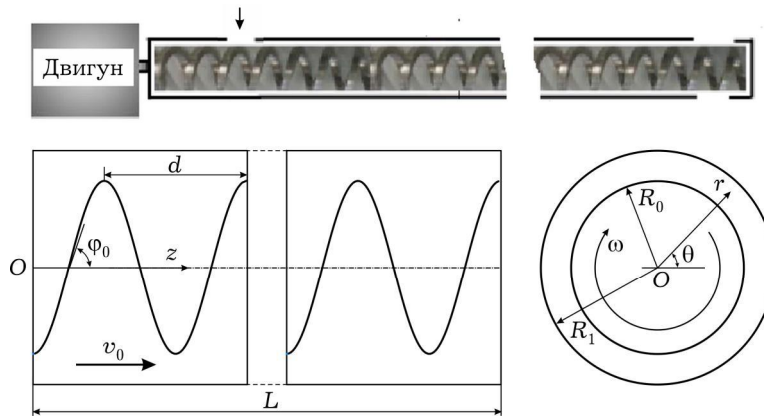


Рис. 1

Потрібно розрахувати температурне поле в наступні моменти часу $\tau > 0$ у довільній точці реактора з урахуванням заданих теплофізичних, кі-нематичних і геометричних параметрів системи. Для цього необхідно роз-в’язати неоднорідне рівняння теплопровідності із заданою осьовою швид-кістю руху матеріалу заповнювача [7]:

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q(r, \theta, z, \tau),$$

$$0 < r < R_1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < z < L, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

при початковій умові

$$T|_{\tau=0} = T_0, \quad (2)$$

граничній умові теплоізоляції на бічній поверхні каналу

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 0, \quad (3)$$

умові обмеженості розв'язку задачі на осі каналу

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (4)$$

а також температурних граничних умовах третього роду (теплообмін за законом Ньютона) [1] на вході

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -h(T_{\text{in}} - T|_{z=0}) \quad (5)$$

і на виході каналу

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} = h(T_{\text{out}} - T|_{z=L}). \quad (6)$$

У цих співвідношеннях r, θ, z – циліндричні координати з початком відліку в центрі поперечного перерізу каналу на вході, τ – час, h – коефіцієнт теплообміну.

Як і в роботах [2, 22], тіло геліси, що періодично обертається навколо осі каналу, моделюємо неперервно розподіленими точковими джерелами тепла, так що функцію інтенсивності $q(r, \theta, z, \tau)$ можемо подати у вигляді

$$q(r, \theta, z, \tau) = \frac{q_0 \varepsilon^2}{r \cos \varphi_0} \delta(r - R_0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta + 2\pi m - \frac{z \operatorname{tg} \varphi_0}{R_0} + \omega \tau\right). \quad (7)$$

Тут $\delta(x)$ – функція Дірака; $q_0 = \rho_0 (jR_1)^2$, ρ_0 – питомий електричний опір провідника, $j = I/S$ – густина електричного струму, I – сила струму, S – площа поперечного перерізу геліси; $\varepsilon = R_0/R_1$; φ_0 – кут підйому геліси.

2. Аналітичний розв'язок задачі. Запишемо температуру T у вигляді ряду Фур'є – Бесселя

$$T(r, \theta, z, \tau) = T_{00}(z, \tau) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(z, \tau) J_m(\mu_{mn} r/R_1) e^{-im\theta}, \quad (8)$$

$$0 < r < R_1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < z < L, \quad \tau > 0,$$

де $J_m(x)$ – функція Бесселя m -го порядку; μ_{mn} – нулі похідної від функції Бесселя $J'_m(\mu)$.

Якщо ввести нові функції $\Omega_{mn}(z, \tau)$, $|m|, n = 0, 1, 2, \dots$, такі, що

$$T_{00}(z, \tau) = \Omega_{00}(z, \tau),$$

$$T_{mn}(z, \tau) = P_{mn}(z, \tau) \Omega_{mn}(z, \tau), \quad |m| = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де

$$P_{mn}(z, \tau) = \frac{J_m(\mu_{mn} \varepsilon)}{[1 - (m/\mu_{mn})^2] J_m^2(\mu_{mn})} \exp\left(im \frac{z \operatorname{tg} \varphi_0}{R_0} - \omega \tau\right),$$

то, застосовуючи до рівняння (1) і граничних умов (3)–(6) інтегральне перетворення Лапласа за часом τ [9, 12]

$$f^L(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

після певних перетворень [14] з урахуванням початкової умови (2) одержимо неоднорідні звичайні диференціальні рівняння другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega_{mn}^L(z, p)}{\partial z^2} - \frac{v_m}{a} \frac{\partial \Omega_{mn}^L(z, p)}{\partial z} - \frac{1}{a} g_{mn}(p) \Omega_{mn}^L(z, p) + \\ + \frac{1}{a} \left(T_0 \delta_{m0} \delta_{n0} + \frac{w}{c_p \rho} \frac{1}{p} \right) = 0, \quad 0 < z < L, \quad |m|, n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

з граничними умовами в зображеннях

$$\left[L \frac{\partial \Omega_{mn}^L(z, p)}{\partial z} - \operatorname{Nu}_m^* \Omega_{mn}^L(z, p) \right] \Big|_{z=0} = -\frac{1}{p} \operatorname{Nu} T_{\text{in}} \delta_{m0} \delta_{n0}, \quad (10)$$

$$\left[L \frac{\partial \Omega_{mn}^L(z, p)}{\partial z} + \operatorname{Nu}_m \Omega_{mn}^L(z, p) \right] \Big|_{z=L} = \frac{1}{p} \operatorname{Nu} T_{\text{out}} \delta_{m0} \delta_{n0}. \quad (11)$$

У співвідношеннях (9)–(11) зірочкою позначено комплексно спряжене число; a – коефіцієнт температуропровідності суміші [7], $a = \lambda / (c_p \rho)$; δ_{mn} – символ Кронеккера: $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n; \end{cases}$ w – питома потужність джерела

тепла [1], $w = \frac{q_0 \varepsilon^2}{\pi R_1^2 \cos \varphi_0}$; v_m – комплексна швидкість руху маси:

$$v_m = v_0 \left(1 - 2im \frac{a \operatorname{tg} \varphi_0}{R_0 v_0} \right), \quad |m| = 0, 1, 2, \dots,$$

Nu – число Нуссельта, $\operatorname{Nu} = hL/\lambda$. Увівши для довільного комплексного числа b позначення $b =: b^{\operatorname{Re}} + ib^{\operatorname{Im}}$, отримаємо таке подання комплексного числа Нуссельта Nu_m :

$$\operatorname{Nu}_m =: \operatorname{Nu}_m^{\operatorname{Re}} + i \operatorname{Nu}_m^{\operatorname{Im}}, \quad \operatorname{Nu}_m^{\operatorname{Re}} = \operatorname{Nu},$$

$$\operatorname{Nu}_m^{\operatorname{Im}} = m \frac{L \operatorname{tg} \varphi_0}{R_0}, \quad |m| = 0, 1, 2, \dots$$

У (9)–(11) також використано позначення

$$g_{00}(p) = p, \quad g_{mn}(p) = p + \frac{a}{R_1^2} \Phi_{mn}, \quad |m| = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$\Phi_{mn} = \Phi_{mn}^{\operatorname{Re}} + i \Phi_{mn}^{\operatorname{Im}},$$

$$\Phi_{mn}^{\operatorname{Re}} = \mu_{mn}^2 + \left(\frac{m \operatorname{tg} \varphi_0}{\varepsilon} \right)^2, \quad \Phi_{mn}^{\operatorname{Im}} = 2\pi m \left(\frac{1}{\operatorname{Fo}_v} - \frac{1}{\operatorname{Fo}_0} \right). \quad (13)$$

Тут Fo_0 – число Фур'є, що відповідає періоду обертання геліси $\tau_0 = 2\pi/\omega$: $\operatorname{Fo}_0 = a\tau_0/R_1^2$; Fo_v – число Фур'є, що відповідає періоду обертання $\tau_v = 2\pi/\omega_v$ частинки біомаси вздовж траєкторії геліси: $\operatorname{Fo}_v = a\tau_v/R_1^2$; $\omega_v = v_0 \operatorname{tg} \varphi_0 / R_0$.

Оскільки вільні члени в диференціальних рівняннях (9) не залежать від змінної z , то, виконавши заміну [1]

$$\tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p) = \Omega_{mn}^L(z, p) - \frac{1}{g_{mn}(p)} \left(T_0 \delta_{m0} \delta_{n0} + \frac{w}{c_p \rho} \frac{1}{p} \right), \quad (14)$$

одержимо однорідні звичайні диференціальні рівняння другого порядку відносно функцій $\tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p)$ з коефіцієнтами, незалежними від змінної z :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p)}{\partial z^2} - \frac{v_m}{a} \frac{\partial \tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p)}{\partial z} - \frac{1}{a} g_{mn}(p) \tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p) = 0, \quad 0 < z < L, \quad |m|, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

з ускладненими граничними умовами

$$\left[L \frac{\partial \tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p)}{\partial z} - \text{Nu}_m^* \tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p) \right]_{z=0} = W_{mn}^{(1)L}(p), \quad (16)$$

$$\left[L \frac{\partial \tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p)}{\partial z} + \text{Nu}_m \tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p) \right]_{z=L} = W_{mn}^{(2)L}(p), \quad (17)$$

де

$$W_{mn}^{(1)L}(p) = \frac{\text{Nu}}{p} (T_0 - T_{\text{in}}) \delta_{m0} \delta_{n0} + \frac{\text{Nu}_m^*}{p g_{mn}(p)} \frac{w}{c_p \rho}, \quad (18)$$

$$W_{mn}^{(2)L}(p) = -\frac{\text{Nu}}{p} (T_0 - T_{\text{out}}) \delta_{m0} \delta_{n0} - \frac{\text{Nu}_m}{p g_{mn}(p)} \frac{w}{c_p \rho}. \quad (19)$$

Загальний розв'язок рівняння (15) має вигляд [12]

$$\tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p) = c_1 e^{s_{mn}^+(p)z} + c_2 e^{s_{mn}^-(p)z}, \quad (20)$$

де

$$s_{mn}^\pm(p) = \frac{v_m}{2a} \pm s_{mn}(p), \quad |m|, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$s_{00}(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{v_0}{a} \right)^2 + \frac{4p}{a}},$$

$$s_{mn}(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{v_m}{a} \right)^2 + \frac{4}{a} g_{mn}(p)}, \quad |m| = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тоді, задовольнивши граничні умови (16) і (17), одержимо таку систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів c_1 і c_2 :

$$a_{mn}^{11}(p)c_1 + a_{mn}^{12}(p)c_2 = W_{mn}^{(1)L}(p),$$

$$a_{mn}^{21}(p)c_1 e^{s_{mn}^+(p)L} + a_{mn}^{22}(p)c_2 e^{s_{mn}^-(p)L} = W_{mn}^{(2)L}(p),$$

де

$$a_{mn}^{11}(p) = \frac{Lv_0}{2a} + s_{mn}(p)L - \text{Nu}, \quad a_{mn}^{12}(p) = \frac{Lv_0}{2a} - s_{mn}(p)L - \text{Nu},$$

$$a_{mn}^{21}(p) = \frac{Lv_0}{2a} + s_{mn}(p)L + \text{Nu}, \quad a_{mn}^{22}(p) = \frac{Lv_0}{2a} - s_{mn}(p)L + \text{Nu}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь і підставивши знайдені коефіцієнти c_1 і c_2 у (20), з урахуванням позначень (12), (18) і (19) отримаємо розв'язок задачі в полі зображень інтегрального перетворення Лапласа:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p) = & \frac{\text{Nu}}{p d_{00}^0(p)} \left\{ (T_0 - T_{\text{in}}) d_{00}^1(z, p) e^{\frac{v_0 z}{2a}} - \right. \\
& - (T_0 - T_{\text{out}}) d_{00}^2(z, p) e^{-\frac{v_0(L-z)}{2a}} + \\
& \left. + \frac{w}{c_p \rho p} \left[d_{00}^1(z, p) e^{\frac{v_0 z}{2a}} - d_{00}^2(z, p) e^{-\frac{v_0(L-z)}{2a}} \right] \right\} \delta_{m0} \delta_{n0} + \\
& + \frac{w}{c_p \rho p_{mn}} \frac{d_{mn}^3(z, p)}{d_{mn}^0(p)} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + p_{mn}} \right) (1 - \delta_{n0}), \\
& 0 < z < L, \quad |m|, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
p_{mn} = & \frac{a}{R_1^2} \Phi_{mn}, \\
d_{mn}^0(p) = & a_{mn}^{12}(p) a_{mn}^{21}(p) e^{s_{mn}(p)L} - a_{mn}^{11}(p) a_{mn}^{22}(p) e^{-s_{mn}(p)L}, \\
d_{mn}^1(z, p) = & a_{mn}^{21}(p) e^{s_{mn}(p)(L-z)} - a_{mn}^{22}(p) e^{-s_{mn}(p)(L-z)}, \\
d_{mn}^2(z, p) = & a_{mn}^{12}(p) e^{s_{mn}(p)z} - a_{mn}^{11}(p) e^{-s_{mn}(p)z}, \\
d_{mn}^3(z, p) = & \text{Nu}_m^* d_{mn}^1(z, p) e^{\frac{v_m z}{2a}} - \text{Nu}_m d_{mn}^2(z, p) e^{-\frac{v_m(L-z)}{2a}}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Як бачимо з розв'язку (21), (22), комплексна функція $\tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p)$ має полюси першого і другого порядку в точці $p = 0$, полюси в точках $p = p_{mn}$, $|m| = 0, 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, а також полюси в точках $p = p_{mnk}$, $|m|, n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, які визначаються через нулі функції $d_{mn}^0(p)$ так [14]:

$$\begin{aligned}
p_{00k} = & -\frac{a}{L^2} \left[\frac{1}{(2\alpha)^2} + v_k^2 \right], \\
p_{mnk} = & -\frac{a}{L^2} \left\{ \frac{1}{(2\alpha)^2} + v_k^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{\beta} \right)^2 - im \frac{L^2 \omega}{a} \right\}, \\
& |m| = 0, 1, 2, \dots, \quad k, n = 1, 2, \dots, \quad (23)
\end{aligned}$$

де

$$\alpha = \frac{a}{Lv_0}, \quad \beta = \frac{R_1}{L}, \quad (24)$$

а v_k – корені трансцендентного рівняння

$$\text{tg } v_k = \frac{8\alpha^2 v_k \text{Nu}}{1 + 4\alpha^2 (v_k^2 - \text{Nu}^2)}. \quad (25)$$

Використовуючи теорему про лишки [12], після деяких перетворень одержимо в полі оригіналів такий результат:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_{mn}(z, \tau) = & \left[(T_0 - T_{\text{in}}) I_{00}^1(z, \tau) - (T_0 - T_{\text{out}}) I_{00}^2(z, \tau) + \right. \\
& \left. + \frac{w}{c_p \rho} I_{00}^3(z, \tau) \right] \delta_{m0} \delta_{n0} + \frac{w}{c_p \rho p_{mn}} \left[J_{mn}^1(z, \tau) - J_{mn}^2(z, \tau) \right] (1 - \delta_{n0}), \\
& 0 < z < L, \quad \tau > 0, \quad |m|, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
I_{00}^1(z, \tau) &= \text{Nu} e^{\frac{z}{2\alpha L}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d_{00}^1(z, p)}{p d_{00}^0(p)} e^{p\tau} dp = \\
&= -\frac{\tilde{d}_{00}^1(z)}{\tilde{d}_{00}^0} - \frac{4\alpha a \text{Nu}}{L^2} e^{\frac{z}{2\alpha L}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_k^1(z)}{d_k^0 p_{00k}} e^{p_{00k}\tau}, \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{00}^2(z, \tau) &= \text{Nu} e^{-\frac{L-z}{2\alpha L}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d_{00}^2(z, p)}{p d_{00}^0(p)} e^{p\tau} dp = \\
&= \frac{\tilde{d}_{00}^2(z)}{\tilde{d}_{00}^0} e^{-\frac{L-z}{\alpha L}} - \frac{4\alpha a \text{Nu}}{L^2} e^{-\frac{L-z}{2\alpha L}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_k^2(z)}{d_k^0 p_{00k}} e^{p_{00k}\tau}, \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{00}^3(z, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d_{00}^3(z, p)}{p^2 d_{00}^0(p)} e^{p\tau} dp = \\
&= -\frac{\alpha L^2}{a \text{Nu}} \frac{\tilde{d}_{00}^3(z)}{\tilde{d}_{00}^0} - \tau - \frac{4\alpha a}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_k^3(z)}{d_k^0 p_{00k}^2} e^{p_{00k}\tau}, \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{mn}^1(z, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d_{mn}^3(z, p)}{p d_{mn}^0(p)} e^{p\tau} dp = \\
&= 2\alpha \frac{\tilde{d}_{mn}^3(z)}{\tilde{d}_{mn}^0} - \frac{4\alpha a}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_{mk}^3(z)}{d_k^0 p_{mnk}} e^{p_{mnk}\tau}, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{mn}^2(z, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d_{mn}^3(z, p)}{(p + p_{mn}) d_{mn}^0(p)} e^{p\tau} dp = \\
&= -e^{-p_{mn}\tau} - \frac{4\alpha a}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_{mk}^3(z)}{d_k^0 (p_{mnk} + p_{mn})} e^{p_{mnk}\tau}. \quad (31)
\end{aligned}$$

У формулах (27)–(31) використано такі позначення:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{00}^0 &= 1 + \alpha \text{Nu} + (1 - \alpha \text{Nu}) e^{-\alpha^{-1}}, \\
\tilde{d}_{00}^1(z) &= 1 + \alpha \text{Nu} - \alpha \text{Nu} e^{-(L-z)(\alpha L)^{-1}}, \\
\tilde{d}_{00}^2(z) &= \alpha \text{Nu} + (1 - \alpha \text{Nu}) e^{-z(\alpha L)^{-1}}, \\
\tilde{d}_{00}^3(z) &= -(1 + \alpha \text{Nu})(1 + \text{Nu} z/L) + \alpha \text{Nu}(\text{Nu} + 2) e^{-(L-z)(\alpha L)^{-1}} + \\
&\quad + (1 - \alpha \text{Nu}) [1 + \text{Nu} (1 - z/L)] e^{-\alpha^{-1}}, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{mn}^0 &= \tilde{a}_{mn}^{12} \tilde{a}_{mn}^{21} - \tilde{a}_{mn}^{11} \tilde{a}_{mn}^{22} e^{-\tilde{s}_{mn} \alpha^{-1}}, \\
\tilde{d}_{mn}^1(z) &= \tilde{a}_{mn}^{21} - \tilde{a}_{mn}^{22} e^{-\tilde{s}_{mn} (L-z)(\alpha L)^{-1}}, \\
\tilde{d}_{mn}^2(z) &= \tilde{a}_{mn}^{12} - \tilde{a}_{mn}^{11} e^{-\tilde{s}_{mn} z(\alpha L)^{-1}}, \\
\tilde{d}_{mn}^3(z) &= \text{Nu}_m^* \tilde{d}_{mn}^1(z) e^{\tilde{s}_{mn} z(2\alpha L)^{-1}} - \text{Nu}_m \tilde{d}_{mn}^2(z) e^{-\tilde{s}_{mn}^+ (L-z)(2\alpha L)^{-1}}, \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{mn}^{11} &= 1 + \tilde{s}_{mn} - 2\alpha \text{Nu}, & \tilde{a}_{mn}^{12} &= 1 - \tilde{s}_{mn} - 2\alpha \text{Nu}, \\
\tilde{a}_{mn}^{21} &= 1 + \tilde{s}_{mn} + 2\alpha \text{Nu}, & \tilde{a}_{mn}^{22} &= 1 - \tilde{s}_{mn} + 2\alpha \text{Nu}, \\
\tilde{s}_{mn}^{\pm} &= \tilde{s}_m \pm \tilde{s}_{mn}, & \tilde{s}_m &= 1 - im\gamma\epsilon^{-1} \text{tg } \varphi_0, \\
\tilde{s}_{mn} &= \sqrt{1 + \gamma^2(\mu_{mn}^2 - 2\pi im \text{Fo}_0^{-1})}, & \gamma &= 2\alpha\beta^{-1} = 2a(R_1 v_0)^{-1}, \\
d_k^0 &= [1 + 4\alpha^2(v_k^2 - \text{Nu}^2 - 2\text{Nu})] \cos v_k + 8\alpha^2(1 + \text{Nu}) \sin v_k, \\
d_k^1(z) &= (1 + 2\alpha \text{Nu}) \sin[v_k(1 - z/L)] + 2\alpha v_k \cos[v_k(1 - z/L)], \\
d_k^2(z) &= (1 - 2\alpha \text{Nu}) \sin(v_k z/L) - 2\alpha v_k \cos(v_k z/L), \\
d_k^3(z) &= d_k^1(z)e^{z(2\alpha L)^{-1}} - d_k^2(z)e^{-(L-z)(2\alpha L)^{-1}}, \\
d_{mk}^3(z) &= \text{Nu}_m^* d_k^1(z)e^{\tilde{s}_m z(2\alpha L)^{-1}} - \text{Nu}_m d_k^2(z)e^{-\tilde{s}_m(L-z)(2\alpha L)^{-1}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Враховуючи співвідношення (14), одержимо

$$\begin{aligned}
\Omega_{mn}(z, \tau) &= \left(T_0 + \frac{w}{c_p \rho} \tau\right) \delta_{m0} \delta_{n0} + \frac{w}{c_p \rho p_{mn}} (1 - e^{-p_{mn}\tau})(1 - \delta_{n0}) + \\
&+ \tilde{\Omega}_{mn}(z, \tau), \quad 0 < z < L, \quad \tau > 0, \quad |m|, n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Звідси на основі формул (26)–(35) остаточно знайдемо компоненти ряду Фур'є – Бесселя (8) у вигляді

$$\begin{aligned}
T_{00}(z, \tau) &= T_0 - \frac{1}{\tilde{d}_{00}^0} \left[(T_0 - T_{\text{in}}) \tilde{d}_{00}^1(z) + (T_0 - T_{\text{out}}) \tilde{d}_{00}^2(z) e^{-(L-z)(\alpha L)^{-1}} + \right. \\
&+ \left. \frac{w}{\lambda} \frac{\alpha L^2}{\text{Nu}} \tilde{d}_{00}^3(z) \right] + \frac{4\alpha a \text{Nu}}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{d_k^0 p_{00k}} \left[(T_0 - T_{\text{in}}) d_k^1(z) e^{z(2\alpha L)^{-1}} - \right. \\
&- \left. (T_0 - T_{\text{out}}) d_k^2(z) e^{-(L-z)(2\alpha L)^{-1}} + \frac{w}{\lambda} \frac{d_k^3(z)}{\text{Nu} p_{00k}} \right] e^{p_{00k}\tau}, \\
&0 < z < L, \quad \tau > 0,
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
T_{0n}(z, \tau) &= P_{0n} \frac{w}{\lambda} \frac{R_1^2}{\mu_{0n}^2} \left\{ 1 + 2\alpha \frac{\tilde{d}_{0n}^3(z)}{\tilde{d}_{0n}^0} + \right. \\
&+ \left. \frac{4\alpha a}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_{0k}^3(z)}{d_k^0} \left(\frac{1}{p_{00k}} - \frac{1}{p_{0nk}} \right) e^{p_{0nk}\tau} \right\}, \\
&0 < z < L, \quad \tau > 0, \quad n = 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
T_{mn}(z, \tau) &= P_{mn}(z, \tau) \frac{w}{\lambda} \frac{R_1^2}{\Phi_{mn}} \left[1 + 2\alpha \frac{\tilde{d}_{mn}^3(z)}{\tilde{d}_{mn}^0} + \right. \\
&+ \left. \frac{4\alpha a}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_{mk}^3(z)}{d_k^0} \left(\frac{1}{p_{mnk} + p_{mn}} - \frac{1}{p_{mnk}} \right) e^{p_{mnk}\tau} \right], \\
&0 < z < L, \quad \tau > 0, \quad |m|, n, k = 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{38}$$

де враховано, що, згідно з формулами (13), $\Phi_{0n} = \mu_{0n}^2$.

Підставляючи вирази (36)–(38) у формулу (8), одержимо точний розв'язок задачі. Якщо при цьому скористатись властивостями функції Бесселя: $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ [10] і симетричністю нулів $\mu_{-m,n} = \mu_{mn}$, то можемо показати, що $T_{-m,n}(z, \tau) = T_{mn}^*(z, \tau)$. Тоді з (8) одержимо

$$T(r, \theta, z, \tau) = T_0 + T_{00}(z, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}(z, \tau) J_0(\mu_{0n} r/R_1) + \\ + 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(z, \tau) J_m(\mu_{mn} r/R_1) e^{-im\theta}, \\ 0 < r < R_1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < z < L, \quad \tau > 0.$$

У **Додатку А** наведено детальне подання складових цієї формули в безрозмірних змінних і параметрах.

3. Розрахунок температурного поля для одного конкретного випадку. Маючи точний розв'язок задачі, можемо провести числовий розрахунок температури в каналі з рухомим заповнювачем (псевдозрідженою біомасою) для конкретної ситуації. Для цього виберемо параметри системи, що в основі своїй відповідають використаним при проведенні експериментальних досліджень (див., наприклад, [19, 27]). Тоді для вибраного типу біомаси матимемо густину матеріалу $\rho = 551 \text{ кг/м}^3$, теплоємність $c_p = 1502 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ і коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0.35 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, що відповідає коефіцієнту температуропровідності суміші $a = 4.23 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. Вважатимемо, що початкова температура біомаси T_0 дорівнює кімнатній температурі 293.15 К . Температури на вході і виході каналу приймаємо однаковими $T_{\text{in}} = T_{\text{out}} = T_c = 300 \text{ К}$. Для коефіцієнта теплообміну h емпірично приймаємо значення $h = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, оскільки даних для нього в літературі знайти не вдалось. При вибраній довжині каналу $L = 1.64 \text{ м}$ це відповідає числу Нуссельта $Nu = 46.86$. Радіуси каналу і геліси дорівнюють, відповідно, $R_1 = 0.026 \text{ м}$ і $R_0 = 0.025 \text{ м}$. Тоді для безрозмірного радіуса геліси матимемо $\varepsilon = 0.962$.

Як і в роботі [27], приймаємо, що масова витрата $v_M = 6.89 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с}$. Це відповідає швидкості руху біомаси в осьовому напрямку циліндричного каналу $v_0 = 5.888 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ ($Fo_v = 0.593$). Такі значення досягаються при кутовій швидкості геліси $\omega = 0.292 \text{ Гц}$ ($Fo_0 = 0.0135$). Тоді для товщини примежового шару температурного поля на вході і на виході каналу $L_0 = \alpha L = av_0$ одержимо значення $L_0 = 7.184 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

Вважатимемо, що гребінь геліси нахилений відносно осі каналу під кутом $\varphi_0 = 73.68^\circ$, що відповідає кроку геліси $d = 2\pi R_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 = 0.046 \text{ м}$. Приймаємо, що радіус поперечного перерізу геліси $r_0 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, тоді його площа дорівнюватиме $S = 7.07 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$. При вибраній силі струму $I = 5 \text{ А}$ це відповідає значенню питомої густини електричного струму провідника $j = 0.707 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2$. Якщо за матеріал геліси виберемо вольфрам, для якого електричний опір $\rho_0 = 4.44 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}$, тоді стала q_0 , яка входить до функції інтенсивності джерела тепла $q(r, \theta, z, \tau)$ (7), дорівнюватиме $q_0 = 18.40 \text{ Вт/м}$. Таким чином, при вибраних параметрах системи питома потужність джерел тепла дорівнюватиме $w = 2.850 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^3$.

На основі обчислень за формулами (A.7), (A.8), (A.10) на рис. 2 подано залежності розподілу температури від числа Фур'є Fo в точці $\xi = 0.5$, $\theta = 0^\circ$, $\zeta = 0.8$ при різних значеннях сили струму: $I = 2.0, 5.0, 10, 15$ А. Для часової координати Fo застосовано логарифмічну шкалу. Тоді чітко проглядається досить короткий перехідний процес порядку $Fo \approx 0.015$, що відповідає $\tau \approx 24$ с. Після цього температура виходить на тривалий квазістаціонарний режим. З рис. 2 також видно, що при виборі сили струму $I = 5$ А у квазістаціонарному режимі температура виходить на рівень приблизно $T = 356$ К. Однак квазістаціонарну температуру характеризує також мікроструктура, яка має коливний характер і залежить від кутової швидкості (циклічної частоти) обертання геліси та її геометричних розмірів.

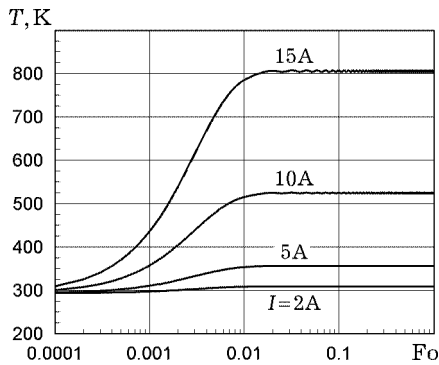


Рис. 2

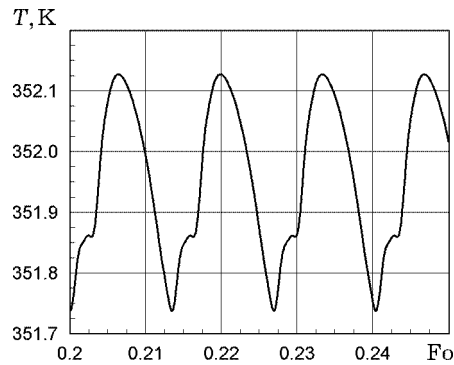
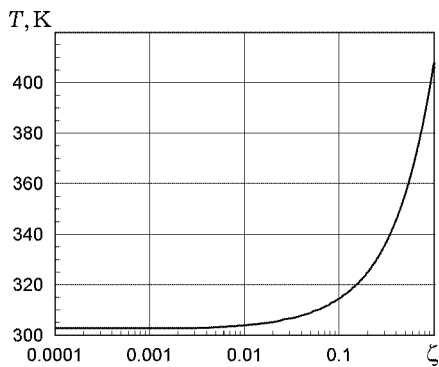


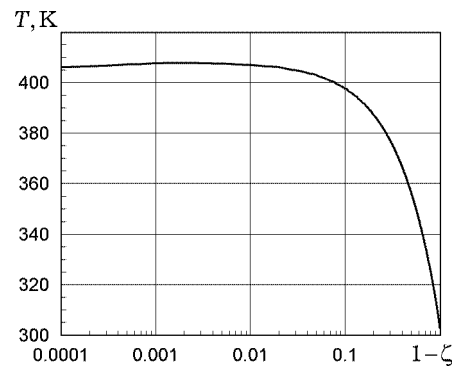
Рис. 3

На рис. 3 показано фрагмент зміни температури за короткий проміжок часу (неповних чотирьох обертах геліси) в точці $\xi = 0.8$, $\theta = 0^\circ$, $\zeta = 0.5$ при $I = 5$ А. Бачимо, що на мікрорівні сигнал температури має вигляд амплітудно-модульованих коливань з періодом $Fo = 0.0135$. Ця циклічність, очевидно, пов'язана з частотою обертання геліси, а квазірегулярність амплітуди в межах одного періоду сигналу – з явищем перевідбиття теплових потоків від циліндричної поверхні реактора, а також від його вхідної і вихідної імпедансних поверхонь. При цьому для точки, в якій обчислюємо температуру, амплітуда коливань цієї температури достатньо мала – порядку 0.39 К.

На рис. 4 зображено миттєвий розподіл температури вздовж осьової лінії каналу $\xi = 0.8$, $\theta = 0^\circ$ при $I = 5$ А в момент, коли $Fo = 0.5$, поблизу входу до каналу (рис. 4а) і виходу з нього (рис. 4б).



а)



б)

Рис. 4

Як бачимо, температура зростає від входу до виходу каналу. Подібне явище було зауважене в теоретичних і експериментальних роботах [15, 19,

20], де електричне нагрівання біомаси відбувалося через стінку реактора, а не за допомогою шнека. Як і у випадку шнека скінченної довжини [14], тут спостерігаємо особливості температурного поля поблизу кінцевих точок $z = 0$ (рис. 4а) і $z = L$ (рис. 4б). Цього досягнуто шляхом використання логарифмічної шкали для змінних ζ і $1 - \zeta$ відповідно. Бачимо, що поблизу вхідного і вихідного поперечних перерізів реактора температура різко змінюється і має характер примежового шару.

Незважаючи на те, що осциляційні складові температури, які пов'язані з геометричними і кінематичними параметрами геліси, досить слабкі на тлі загального температурного поля, все ж доцільно проаналізувати їх детальніше. Для цього зосередимось на тій частині температури, яка залежить лише від об'ємного джерела тепла, тобто на тій, що містить питому потужність джерела тепла w . З цією метою використаємо функцію

$$\vartheta(\xi, \theta, \zeta, Fo) = \frac{1}{q_0/(\pi\lambda)} \left[T(\xi, \theta, \zeta, Fo) - T_0 - (T_c - T_0) \left(1 - e^{-Fo/\gamma^2} \right) \right],$$

яку назвемо *функцією впливу*. За вибраних теплофізичних параметрів $q_0/(\pi\lambda) \approx 17$ К.

На рис. 5 показано зміну функції $\vartheta(\xi, \theta, \zeta, Fo)$ за три періоди осциляцій в точках, розміщених уздовж променя $0 \leq \xi \leq 1$, $\theta = 0^\circ$ в серединному поперечному перерізі реактора $\zeta = 0.5$. При цьому рис. 5а відповідає випадку, коли радіус геліси дорівнює $R_0 = 0.025$ м ($\varepsilon = 0.962$), а рис. 5б – випадку, коли радіус геліси ε в два рази меншим, $R_0 = 0.0125$ м ($\varepsilon = 0.481$). На рисунках бачимо, що при підході до геліси амплітуда температури різко збільшується в моменти проходження геліси найближче до точки спостереження. Подібні, але значно слабші амплітудні сплески температури спостерігаємо у випадку шнека скінченної довжини, коли його гребінь проходить біля точки спостереження [14].

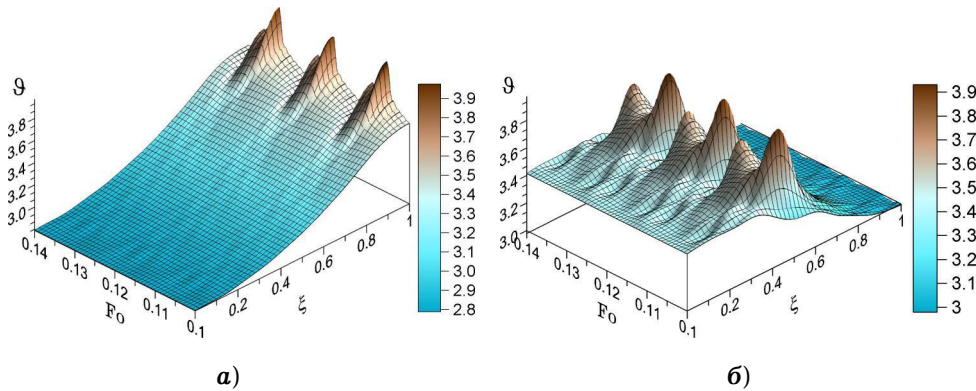


Рис. 5

Рис. 6 ілюструє зміну в часі функції впливу ϑ для точок, розміщених уздовж кола радіуса $\xi = 0.8$, $0 \leq |\theta| \leq 180^\circ$ на серединному поперечному перерізі реактора $\zeta = 0.5$. Тут відносний радіус геліси $\varepsilon = 0.962$, а час тривалості спостереження охоплює три періоди обертання джерела тепла. Графік чітко відтворює геометричну структуру геліси. Характерно, що амплітуда максимальних значень температури, які розміщені під кутом $\pi/2 - \varphi_0$ до кутової координатної осі каналу, практично залишається сталою уздовж гребенів геліси. Водночас поперечний переріз цих амплітуд має модульований характер (див. також рис. 3), що пов'язано з інтерференційними процесами теплових потоків на бічній поверхні реактора.

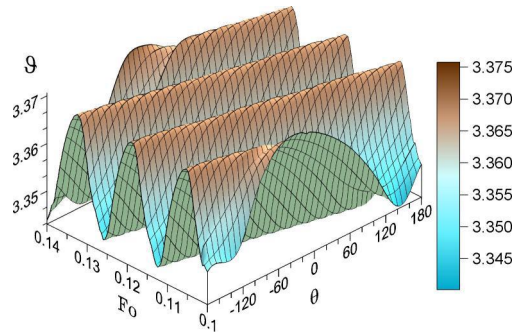


Рис. 6

На рис. 7а, б зображено періодичну структуру функції Ψ в часі вздовж малого відрізка осьової лінії реактора $\xi = 0.8$, $\theta = 0^\circ$, $0.2 \leq \zeta \leq 0.3$. Тут відносний радіус геліси $\varepsilon = 0.962$. На рис. 7а зауважуємо зростаючу амплітуду функції впливу в осьовому напрямі каналу з незначними коливаннями. Мікроструктура цих коливань проілюстрована на рис. 7б, побудованому без урахування вкладу $T_{00}(\zeta, Fo)$. Вона має форму стоячих теплових хвиль з гвинтовими амплітудами, максимумами яких відповідають моментам наближення гребеня геліси до точки спостереження. Нормалі до фронтів цих хвиль нахилені під кутом φ_0 до осі реактора.

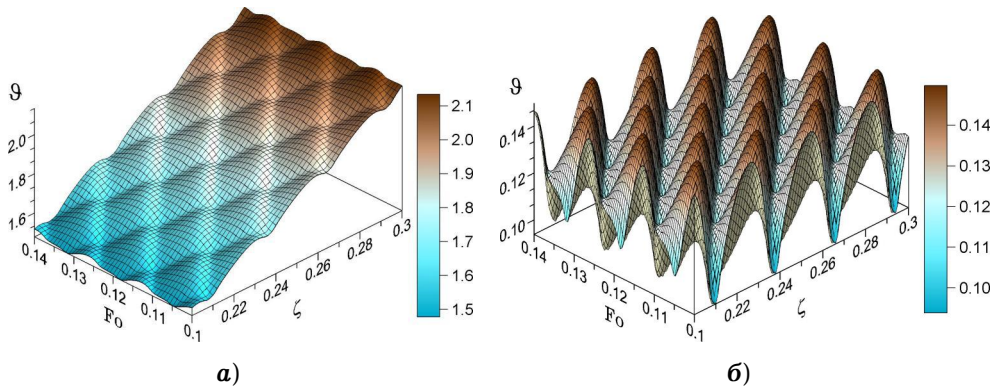


Рис. 7

На рис. 8а ($\varepsilon = 0.962$) і рис. 8б ($\varepsilon = 0.481$) подано миттєву ($Fo = 0.5$) тривимірну залежність функції впливу Ψ від координат ξ і θ в середньому поперечному перерізі реактора $\zeta = 0.5$. Рисунок демонструє неістотну зміну температури в кутовому напрямку на тлі інтенсивної зміни в радіальному напрямку. Природно, що значні максимуми амплітуди температури в кутовому напрямку досягаються в точках поблизу проходження геліси.

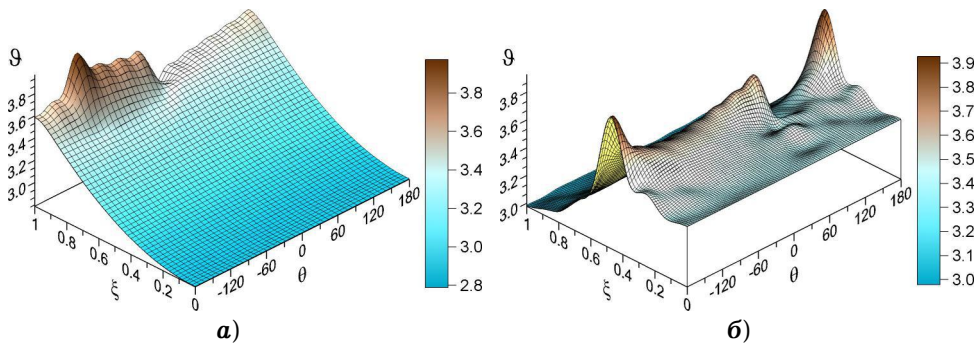


Рис. 8

Подібно рис. 9а ($\varepsilon = 0.962$) і рис. 9б ($\varepsilon = 0.481$) ілюструють миттєві зміни функції впливу ϑ в площині (ξ, ζ) на невеликому інтервалі $0.2 \leq \zeta \leq 0.3$ вздовж осьової змінної при $\theta = 0^\circ$ і $Fo = 0.5$. Максимуми мікрополя температури тут мають вигляд гребенів, крок між якими дорівнює безрозмірному кроку геліси $d/L = 0.028$.

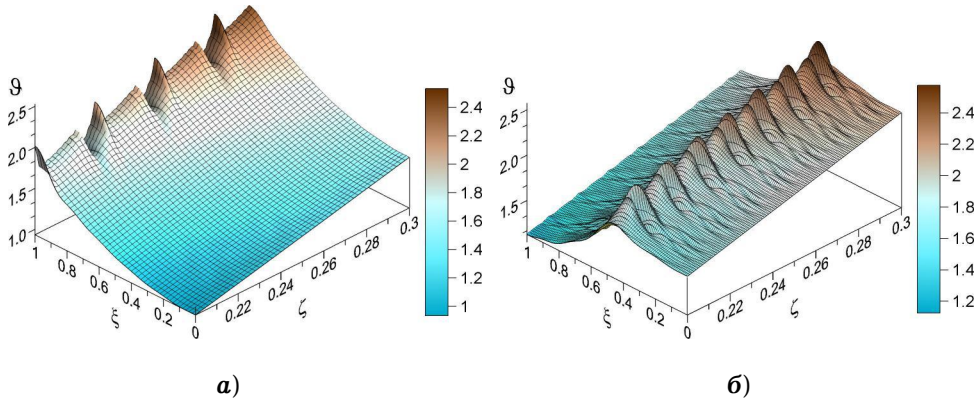


Рис. 9

Миттєвий розподіл функції впливу ϑ на циліндричній поверхні $\xi = 0.8$, $0 \leq |\theta| \leq 180^\circ$, $0.2 \leq \zeta \leq 0.3$ показано на рис. 10а (на рис. 10б без вкладу $T_{00}(\zeta, Fo)$). Тут і далі $\varepsilon = 0.962$, $Fo = 0.5$. Можна зауважити, що внаслідок суперпозиції теплових потоків уздовж гвинтових гребенів поширення тепла виникає квазіперіодична структура температури в осьовому $\theta = \text{const}$ і азимутальному $\zeta = \text{const}$ перерізах.

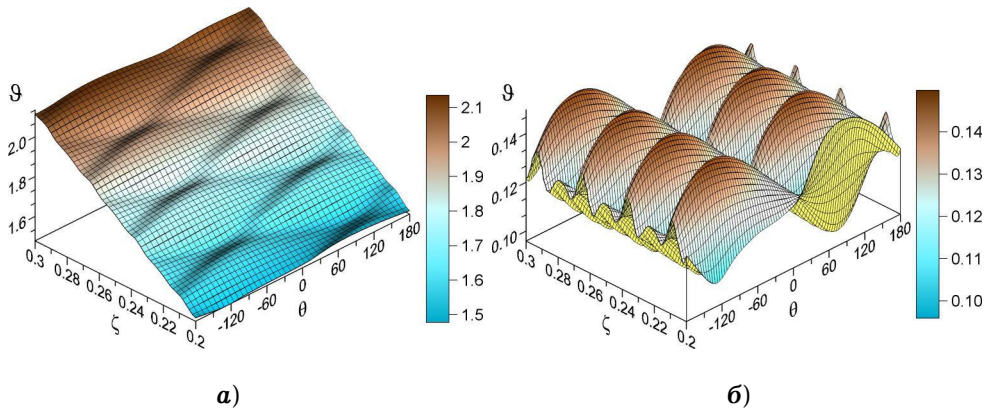


Рис. 10

У попередніх роботах автора для випадків реактора безмежної [13] і скінченної [14] довжини було встановлено явище просторово-часового резонансу, при якому відбувається локальне збільшення амплітуди функції впливу ϑ , коли частота обертання геліси ω при фіксованій швидкості руху потоку псевдозрідженої маси v_0 набуває певного значення, пов'язаного зі значенням цієї швидкості умовою просторово-часового синхронізму за допомогою рівняння $Fo_v = Fo_0$ або $v = R_0 \omega = v_0 \text{tg } \varphi_0$. Це явище універсальне і воно реалізується також у випадку розглядуваної задачі. Тут його ілюструє рис. 11. Обчислення виконано в точці $\xi = 0.8$, $\theta = 0^\circ$, $\zeta = 0.5$ в момент, коли $Fo = 0.5$ і $v_0 = 5.89 \cdot 10^{-4}$ м/с ($\varphi_0 = 73.68^\circ$, $Fo_v = 0.593$). Пік максимальної ам-

плітуди спостерігається для значення $\omega = \omega_{\text{res}} \approx 0.085$ Гц, причому перепад функції ϑ досягає значення 1.24.

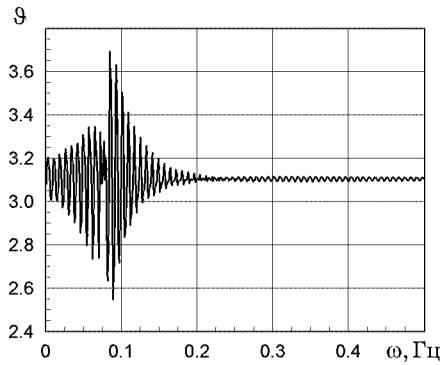


Рис. 11

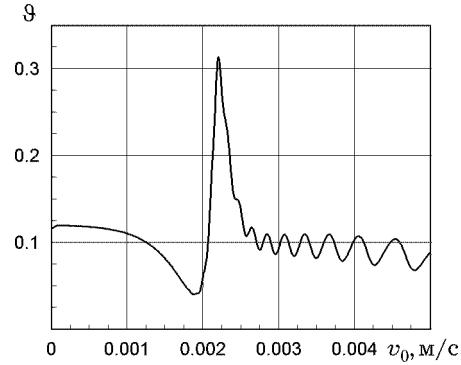


Рис. 12

При вибраній незмінній частоті обертання геліси $\omega = 0.292$ Гц ($\text{Fo}_0 = 0.0135$), але змінній лінійній швидкості руху суміші v_0 одержуємо таке значення цієї швидкості, при якому амплітуда функції впливу ϑ досягає екстремальної величини, а її фаза різко змінюється. З обчислень, проілюстрованих на рис. 12 (без вкладу $T_{00}(\zeta, \text{Fo})$) для випадку, коли $\xi = 0.8$, $\theta = 0^\circ$, $\zeta = 0.5$, $\text{Fo} = 0.5$, $\varphi_0 = 73.68^\circ$, $R_2 = 0.009$ м, впливає, що зміна фази відбувається при $v_0 = v_{0,\text{res}} \approx 0.00202$ м/с. З умови просторово-часового синхронізму одержуємо значення кутової швидкості геліси для цього випадку $\omega \approx v_0 \text{tg } \varphi_0 / (R_0 \varepsilon) = 0.288$ Гц, тобто ця умова виконується достатньо точно.

Варто зауважити, що, як впливає з обчислень, в діапазоні значень швидкості руху біомаси поблизу $v_0 = v^* = 0.512 \cdot 10^{-4}$ м/с для різних значень безрозмірної змінної ζ , $0 \leq \zeta \leq 1$, на прямій $\xi = 0.8$, $\theta = 0^\circ$ при $\varphi_0 = 73.68^\circ$ і силі струму $I = 1$ А амплітуда температури локально різко збільшується (рис. 13). Як впливає з формул (A.9) і (A.10), це відбувається з огляду на наявність добутку

$$\alpha \left(1 - e^{-\text{Fo}/\gamma^2} \right) = \alpha \left[1 - e^{-\beta^2 \text{Fo}/(2\alpha)^2} \right] \quad (39)$$

при фіксованому значенні числа Фур'є Fo (в розглядуваному випадку $\text{Fo} = 0.5$). При цьому параметр α залишається малим, $\alpha = 0.00504$, тобто наближення (A.1) виконуються.

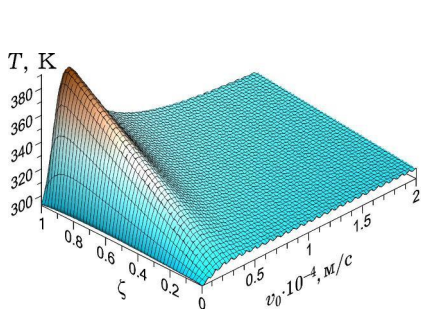


Рис. 13

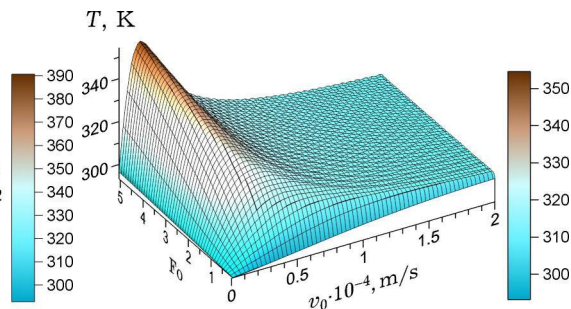


Рис. 14

Оскільки рух біомаси спричиняється обертанням геліси, то з умови просторово-часового синхронізму $\omega = v_0 \text{tg } \varphi_0 / (R_0 \varepsilon)$ впливає, що при не-

змінних геометричних параметрах системи цій швидкості повинна відповідати частота обертання геліси $\omega = 0.0073$ Гц.

Екстремальне значення швидкості руху маси не є сталим на всьому часовому інтервалі нагрівання. Це ілюструє рис. 14, на якому зображено залежність повної температури T від швидкості v_0 і числа Фур'є Fo , одержаної в точці $\xi = 0.8$, $\theta = 0^\circ$, $\zeta = 0.5$ при $\varphi_0 = 73.68^\circ$, $\omega = v_0 \operatorname{tg} \varphi_0 / (R_0 \varepsilon)$ і силі струму $I = 1$ А. Бачимо, що при фіксованій швидкості руху маси $v_0 = v_0^*$ максимальне значення температури в перехідному режимі досягається лише для конкретного значення числа Фур'є $Fo = Fo^*$, тобто відбувається дисперсія в часі екстремального значення швидкості. Цю дисперсійну залежність можна визначити, аналізуючи множник (39). Для цього розглянемо функцію

$$f(x) = x \left(1 - e^{-1/x^2} \right), \quad x = \frac{\alpha}{\beta \sqrt{Fo^*}} = \frac{a}{v_0^* R_1 \sqrt{Fo^*}}$$

(тут враховано позначення (24)). Максимальне значення функції $f(x)$ одержуємо при $x \approx 0.892$. Тоді між критичним значенням швидкості v_0^* і числом Фур'є Fo^* отримаємо залежність

$$v_0^* \approx 1.121 \frac{a}{R_1 \sqrt{Fo^*}}.$$

Зауважимо, що число Фур'є, яким визначається час тривалості перехідного процесу для температури, теж є пропорційним до параметра $a^2 / (v_0 R_1)^2$, тобто, чим більша швидкість руху маси, тим коротший цей перехідний процес.

Висновки. У цій роботі побудовано математичну модель процесу нагрівання псевдозрідженого заповнювача (наприклад, біомаси) в круговому циліндричному каналі скінченної довжини. Вважається, що цей заповнювач нагрівається і пересувається вздовж осі каналу зі сталою лінійною швидкістю під впливом електрично нагрітої геліси, що обертається. Геліса не містить внутрішнього осьового валу, а урухомлюється зовні каналу. Припускається, що бічна поверхня каналу теплоізолювана, а на плоских поверхнях входу і виходу каналу виконуються граничні умови конвекційного теплообміну Ньютона (граничні умови третього роду). До початку дії джерела тепла температура біомаси дорівнювала T_0 . Шуканий розв'язок подано у вигляді рядів Фур'є – Бесселя за кутовою і радіальною координатами, до коефіцієнтів яких застосовано інтегральне перетворення Лапласа за часом. В результаті у просторі зображень одержано неоднорідні звичайні диференціальні рівняння другого порядку за осьовою змінною з відповідними граничними умовами. За допомогою заміни шуканої функції деякою новою функцією для цієї нової функції одержано однорідні диференціальні рівняння, але з ускладненими граничними умовами. Розв'язок цих рівнянь одержано елементарно, а після переходу у поле оригіналів для нього знайдено вираз у вигляді суперпозиції гіперболічних і тригонометричних функцій. Однак внаслідок урахування швидкості руху заповнювальної маси в обчислювальному алгоритмі виявився множник у вигляді експоненти з великим аргументом, тому виникли труднощі з числовою реалізацією цього алгоритму при описі перехідного процесу нагрівання заповнювальної речовини. У зв'язку з цим виконано наближену регуляризацию розв'язку, яка ґрунтується на використанні малого параметра задачі. Слід зазначити, що ця регуляризація дає точний розв'язок задачі в квазістаціонарному режимі. Наступні числові розрахунки були виконані з використанням теплофізич-

них, кінематичних і геометричних параметрів, відомих з експериментальної літератури або ж запроваджених емпірично. Внаслідок цих обчислень проведено числовий аналіз просторового і часового розподілу температури в реакторі при інтенсивності сили струму, яка забезпечує рівень цієї температури порядку 400 К. З виконаного аналізу випливають такі висновки.

- Як і у випадку широкого шнека скінченної довжини, в цій задачі перехідний процес зміни температури при вибраних з експерименту частоті обертання геліси і швидкості руху псевдозрідженої маси є дуже короткотривалим, після чого температура виходить на квазістаціонарний режим. Квазістаціонарна частина температурного поля характеризується тим, що на рівні сталої температури відбуваються амплітудно-модульовані коливання, частота яких визначається періодом обертання геліси, а амплітуда – суперпозицією теплових потоків, відбитих від бічної поверхні каналу та від вхідного і вихідного поперечних перерізів каналу, де відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Амплітуда цих коливань є достатньо малою і має порядок 0.42 К.

- Показано, що загалом температура зростає вздовж осі каналу в напрямку руху біомаси. Крім того, внаслідок руху біомаси розв'язок задачі має характер примежового шару, тобто на безрозмірній віддалі ζ порядку $2a/v_0$ від входу і виходу каналу температура має дещо інший вигляд (зменшену амплітуду), ніж в основній частині реактора.

- Проведено детальний аналіз функції впливу ϑ , інваріантної відносно квадрата густини індукційного струму як джерела нагрівання геліси. Показано, що зміна в часі цієї функції характеризується квазіперіодичними змінами амплітуди температури на мікрорівні. Ці зміни амплітуди розміщені в просторі і часі так, що відображають гвинтову форму геліси. Відсутність інтерференції теплових потоків на поверхні геліси призводить до того, що амплітуди коливань температури є істотно більшими, ніж у випадку широкого шнека.

- Найбільш виразно прослідковуються модуляції температурного поля в осьовому і азимутальному напрямках, де розподіл температури чутливий до геометрії і частоти обертання геліси. Це є наслідком складної суперпозиції потоків тепла, відбитих від кінців каналу.

- У цій статті підтверджено існування ефекту резонансного коливання амплітуди температури при переході частоти обертання геліси через певне значення, пов'язане зі сталою швидкістю руху біомаси умовою просторово-часового синхронізму. У випадку ж незмінної частоти обертання геліси існує таке значення швидкості руху біомаси, визначене тією самою умовою просторово-часового синхронізму, при якій відбувається стрибок фази коливань температури на $\pi/2$. Чисельно встановлено, що в області дуже малих швидкостей руху біомаси відбувається ще одне екстремальне збільшення амплітуди температури. Воно описується «поршневою» моделлю температурного поля, тісно пов'язане з малим параметром задачі і характеризується зростанням температури вздовж осі каналу від входу до виходу.

Додаток А. Розрахункові формули для обчислення температури.

Внаслідок того, що параметр α малий: $\alpha = 4.381 \cdot 10^{-4}$, можна сподіватись, що множник $\exp[z/(2\alpha L)]$, який міститься у формулах (27) і (35), при його обчисленні може давати машинне переповнення. Для того щоб регуляризувати відповідні функції, належало б дослідити асимптотичну поведінку рядів за індексом k у рівняннях (36)–(38) при $\alpha \rightarrow 0$. Пропонуємо інший спосіб регуляризації розв'язку задачі, який ґрунтується на тому факті, що при малому параметрі α полюси (23) функції $\tilde{\Omega}_{mn}^L(z, p)$ можемо записати у наближеному вигляді:

$$\begin{aligned}
p_{00k} &\approx q_{00} + O(\alpha^2 v_k^2), & q_{00} &= -a(R_1 \gamma)^{-2}, \\
p_{mnk} &\approx q_{mn} + im\omega + O(\alpha^2 v_k^2), & q_{mn} &= -a(R_1 \gamma)^{-2} [1 + (\mu_{mn} \gamma)^2], \\
m &= 0, 1, 2, \dots, & k, n &= 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{A.1}$$

де $O(\alpha^2 v_k^2)$ – величина малого порядку порівняно з $\alpha^2 v_k^2$ (нагадаємо, що v_k – корені рівняння (25)). Це виправдано тим, що поки числа v_k досягнуть значення $1/\alpha$, суми з експонентами $e^{p_{mnk}\tau}$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, у формулах (36)–(38) при $\tau > 0$ практично дорівнюватимуть нулеві.

Якщо тепер до інтегралів (27)–(31) застосувати теорему Бореля про згортку [9]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_1^L(p) f_2^L(p) e^{p\tau} dp = \int_0^\tau f_1(\tau') f_2(\tau - \tau') d\tau', \quad \tau > 0, \quad \sigma > 0,$$

де $f_j^L(p)$ – інтегральне перетворення Лапласа функції $f_j(\tau)$, $f_j(\tau) \equiv 0$, $\tau < 0$, $j = 1, 2$, то одержимо формули підсумовування рядів:

$$\begin{aligned}
\frac{4a \text{Nu} \alpha}{L^2} e^{\frac{z}{2\alpha L}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_k^1(z)}{d_k^0 p_{00k}} &= -\frac{\tilde{d}_{00}^1(z)}{\tilde{d}_{00}^0}, \\
\frac{4a \text{Nu} \alpha}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_k^2(z)}{d_k^0 p_{00k}} &= \frac{\tilde{d}_{00}^2(z)}{\tilde{d}_{00}^0} e^{-\frac{L-z}{2\alpha L}}, \\
\frac{4a\alpha}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_k^3(z)}{d_k^0 p_{00k}} &= -1, \\
\frac{4a\alpha}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_{mnk}^3(z)}{d_k^0 p_{mnk}} &= 2\alpha \frac{\tilde{d}_{mn}^3(z)}{\tilde{d}_{mn}^0}, \\
\frac{4a\alpha}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k d_{mk}^3(z)}{d_k^0 (p_{mnk} + p_{mn})} &= -1, \quad 0 < z < L, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Як наслідок одержимо формули (36)–(38) в регуляризованому вигляді:

$$\begin{aligned}
T_{00}(z, \tau) &\approx T_0 - \frac{1}{\tilde{d}_{00}^0} \left[(T_0 - T_{\text{in}}) \tilde{d}_{00}^1(z) + (T_0 - T_{\text{out}}) \tilde{d}_{00}^2(z) e^{-(L-z)(\alpha L)^{-1}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{w}{\lambda} \frac{\alpha L^2}{\text{Nu}} \tilde{d}_{00}^3(z) \right] (1 - e^{q_{00}\tau}), \quad 0 < z < L, \quad \tau > 0, \tag{A.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{0n}(z, \tau) &\approx P_{0n} \frac{w}{\lambda} \frac{R_1^2}{\mu_{0n}^2} \left[1 + 2\alpha \frac{\tilde{d}_{0n}^3(z)}{\tilde{d}_{0n}^0} \right] (1 - e^{q_{0n}\tau}), \\
0 < z < L, \quad \tau > 0, \quad n &= 1, 2, \dots, \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{mn}(z, \tau) &\approx P_{mn}(z, \tau) \frac{w}{\lambda} \frac{R_1^2}{\Phi_{mn}} \left[1 + 2\alpha \frac{\tilde{d}_{mn}^3(z)}{\tilde{d}_{mn}^0} \right] (e^{-im\omega\tau} - e^{q_{mn}\tau}), \\
0 < z < L, \quad \tau > 0, \quad m, n &= 1, 2, \dots \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Для подальшого числового аналізу розв'язку задачі зручно використати безрозмірні змінні:

$$\xi = \frac{r}{R_1}, \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad \text{Fo} = \frac{\alpha\tau}{R_1^2},$$

де Fo – число Фур'є. Тоді вираз для температури формально можемо записати як

$$\begin{aligned} T(\xi, \theta, \zeta, \text{Fo}) &= T_0 + T_{00}(\zeta, \text{Fo}) + \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}(\zeta, \text{Fo}) J_0(\mu_{0n}\xi) + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(\zeta, \text{Fo}) J_m(\mu_{mn}\xi) e^{-im\theta}, \\ &0 < \xi < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \zeta < 1, \quad \text{Fo} > 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Далі у розрахункових формулах виділимо компоненти з малим параметром α . Крім того, потрібно також розкрити в явному вигляді комплексні вирази. В результаті на основі формул (A.2)–(A.5) одержимо такі розрахункові формули:

$$\begin{aligned} T_{00}(\zeta, \text{Fo}) &\approx T_0 - \left[(T_0 - T_{\text{in}}) R_{00}^1(z) + (T_0 - T_{\text{out}}) R_{00}^2(\zeta) + \right. \\ &\left. + \frac{q_0}{\pi\lambda \cos \varphi_0} c_{00} R_{00}^3(\zeta) \right] \left(1 - e^{-\text{Fo}\gamma^{-2}} \right), \quad 0 < \zeta < 1, \quad \text{Fo} > 0, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} T_{0n}(\zeta, \text{Fo}) &\approx \frac{q_0}{\pi\lambda \cos \varphi_0} c_{0n} \left[1 + 2\alpha R_{0n}^3(\zeta) \right] \left[1 - e^{-(\mu_{0n}^2 + \gamma^{-2})\text{Fo}} \right], \\ &0 < \zeta < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [T_{mn}(\zeta, \text{Fo}) e^{-im\theta}] &\approx \frac{q_0}{\pi\lambda \cos \varphi_0} c_{mn} \left\{ [K_{mn}^{\operatorname{Re}}(\zeta) + 2\alpha R_{mn}^{\operatorname{Re},3}(\zeta)] \times \right. \\ &\times \left\{ \cos \left[m \left(\theta + 2\pi \frac{\text{Fo}}{\text{Fo}_0} \right) \right] - \cos(m\theta) e^{-(\mu_{mn}^2 + \gamma^{-2})\text{Fo}} \right\} - \\ &- [K_{mn}^{\operatorname{Im}}(\zeta) + 2\alpha R_{mn}^{\operatorname{Im},3}(\zeta)] \left\{ \sin \left[m \left(\theta + 2\pi \frac{\text{Fo}}{\text{Fo}_0} \right) \right] - \right. \\ &\left. \left. - \sin(m\theta) e^{-(\mu_{mn}^2 + \gamma^{-2})\text{Fo}} \right\} \right\}, \\ &0 < \zeta < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Тут

$$\begin{aligned} c_{00} &= \frac{\varepsilon^2 \alpha}{\beta^2}, \quad c_{0n} = \frac{\varepsilon^2 J_0(\mu_{0n}\varepsilon)}{\mu_{0n}^2 J_0^2(\mu_{0n})}, \\ c_{mn} &= \frac{2\varepsilon^2 J_m(\mu_{mn}\varepsilon)}{[1 - (m/\mu_{mn})^2] J_m^2(\mu_{mn}) D_{mn}}, \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Функції $R_{00}^1(\zeta)$ і $R_{00}^2(\zeta)$ мають фізичний зміст коефіцієнтів перевищення осесиметричного теплового потоку поршневого типу від вхідного $\zeta = 0$ і вихідного $\zeta = 1$ отворів каналу відповідно, а $R_{00}^3(\zeta)$ є комбінацією цих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned}
R_{00}^1(\zeta) &= \frac{d_{00}^1(\zeta)}{d_{00}^0}, & R_{00}^2(\zeta) &= \frac{d_{00}^2(\zeta)}{d_{00}^0} e^{-(1-\zeta)\alpha^{-1}}, & R_{00}^3(\zeta) &= \frac{1}{Nu} \frac{d_{00}^3(\zeta)}{d_{00}^0}, \\
d_{00}^0 &= 1 + \alpha Nu + (1 - \alpha Nu)e^{-\alpha^{-1}}, & d_{00}^1(\zeta) &= 1 + \alpha Nu - \alpha Nu e^{-(1-\zeta)\alpha^{-1}}, \\
d_{00}^2(\zeta) &= \alpha Nu + (1 - \alpha Nu)e^{-\zeta\alpha^{-1}}, & d_{00}^3(\zeta) &= -(1 + \alpha Nu)(1 + Nu\zeta) + \\
&+ \alpha Nu(Nu + 2)e^{-(1-\zeta)\alpha^{-1}} + (1 - \alpha Nu)[1 + Nu(1 - \zeta)]e^{-\alpha^{-1}}. \quad (\mathbf{A.9})
\end{aligned}$$

Подібно функції $R_{0n}^1(\zeta)$ і $R_{0n}^2(\zeta)$ є коефіцієнтами перевипромінювання теплового потоку осесиметричної n -моди в осьовому напрямку каналу від його вхідного і вихідного поперечних перерізів відповідно, а $R_{0n}^3(\zeta)$ – їхньою комбінацією:

$$R_{0n}^3(\zeta) = Nu \left[R_{0n}^1(\zeta) e^{-(s_{0n}^{\text{Re}} - 1)\zeta(2\alpha)^{-1}} + R_{0n}^2(\zeta) e^{-(s_{0n}^{\text{Re}} + 1)(1-\zeta)(2\alpha)^{-1}} \right],$$

$$R_{0n}^j(\zeta) = \frac{d_{0n}^{\text{Re},j}(\zeta)}{d_{0n}^{\text{Re},0}}, \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Функції $R_{mn}^{\text{Re},3}(\zeta)$ і $R_{mn}^{\text{Im},3}(\zeta)$ також є комбінаціями коефіцієнтів перевипромінювання теплового потоку асиметричної m -моди в радіальному і n -моди в осьовому напрямі (гвинтова траєкторія теплових променів) $R_{mn}^1(\zeta)$ і $R_{mn}^2(\zeta)$, $m, n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}
R_{mn}^{\text{Re},3}(\zeta) &= R_{mn}^{\text{Re},1}(\zeta)(Nu I_{mn}^{\text{Re}} - Nu_m^{\text{Im}} I_{mn}^{\text{Im}}) - \\
&- R_{mn}^{\text{Im},1}(\zeta)(Nu I_{mn}^{\text{Im}} + Nu_m^{\text{Im}} I_{mn}^{\text{Re}}) - R_{mn}^{\text{Re},2}(\zeta)(Nu J_{mn}^{\text{Re}} + Nu_m^{\text{Im}} J_{mn}^{\text{Im}}) + \\
&+ R_{mn}^{\text{Im},2}(\zeta)(Nu J_{mn}^{\text{Im}} - Nu_m^{\text{Im}} J_{mn}^{\text{Re}}), \\
R_{mn}^{\text{Im},3}(\zeta) &= R_{mn}^{\text{Re},1}(\zeta)(Nu I_{mn}^{\text{Im}} + Nu_m^{\text{Im}} I_{mn}^{\text{Re}}) + R_{mn}^{\text{Im},1}(\zeta)(Nu I_{mn}^{\text{Re}} - Nu_m^{\text{Im}} I_{mn}^{\text{Im}}) - \\
&- R_{mn}^{\text{Re},2}(\zeta)(Nu J_{mn}^{\text{Re}} - Nu_m^{\text{Im}} J_{mn}^{\text{Re}}) - \\
&- R_{mn}^{\text{Im},2}(\zeta)(Nu J_{mn}^{\text{Re}} + Nu_m^{\text{Im}} J_{mn}^{\text{Im}}),
\end{aligned}$$

де

$$R_{mn}^{\text{Re},1}(\zeta) = R_{mn}^1(\zeta) e^{-(s_{mn}^{\text{Re}} - 1)\zeta(2\alpha)^{-1}} \cos[\psi_{mn}^1(\zeta) - s_{mn}^{\text{Im}} \zeta(2\alpha)^{-1}],$$

$$R_{mn}^{\text{Im},1}(\zeta) = R_{mn}^1(\zeta) e^{-(s_{mn}^{\text{Re}} - 1)\zeta(2\alpha)^{-1}} \sin[\psi_{mn}^1(\zeta) - s_{mn}^{\text{Im}} \zeta(2\alpha)^{-1}],$$

$$R_{mn}^{\text{Re},2}(\zeta) = R_{mn}^2(\zeta) e^{-(s_{mn}^{\text{Re}} + 1)(1-\zeta)(2\alpha)^{-1}} \cos[\psi_{mn}^2(\zeta) - s_{mn}^{\text{Im}}(1 - \zeta)(2\alpha)^{-1}],$$

$$R_{mn}^{\text{Im},2}(\zeta) = R_{mn}^2(\zeta) e^{-(s_{mn}^{\text{Re}} + 1)(1-\zeta)(2\alpha)^{-1}} \sin[\psi_{mn}^2(\zeta) - s_{mn}^{\text{Im}}(1 - \zeta)(2\alpha)^{-1}],$$

$$I_{mn}^{\text{Re}} = \cos \varphi_{mn}, \quad I_{mn}^{\text{Im}} = \sin \varphi_{mn},$$

$$J_{mn}^{\text{Re}} = \cos\left(\varphi_{mn} - \frac{m \operatorname{tg} \varphi_0}{\beta \varepsilon}\right), \quad J_{mn}^{\text{Im}} = \sin\left(\varphi_{mn} - \frac{m \operatorname{tg} \varphi_0}{\beta \varepsilon}\right),$$

$$K_{mn}^{\text{Re}}(\zeta) = \cos\left(\varphi_{mn} - \frac{m \zeta \operatorname{tg} \varphi_0}{\beta \varepsilon}\right), \quad K_{mn}^{\text{Im}}(\zeta) = \sin\left(\varphi_{mn} - \frac{m \zeta \operatorname{tg} \varphi_0}{\beta \varepsilon}\right).$$

Тут

$$R_{mn}^j(\zeta) = \left\{ \left[[d_{mn}^{\text{Re},j}(\zeta)]^2 + [d_{mn}^{\text{Im},j}(\zeta)]^2 \right] \cdot [(d_{mn}^{\text{Re},0})^2 + (d_{mn}^{\text{Im},0})^2]^{-1} \right\}^{1/2},$$

$$\psi_{mn}^j(\zeta) = \arctg [d_{mn}^{\text{Im},j}(\zeta)/d_{mn}^{\text{Re},j}(\zeta)] - \arctg [d_{mn}^{\text{Im},0}/d_{mn}^{\text{Re},0}], \quad j = 1, 2,$$

$$D_{mn} = \sqrt{\Phi_{mn}^{\text{Re},2} + \Phi_{mn}^{\text{Im},2}}, \quad \Phi_{mn} = \arctg (\Phi_{mn}^{\text{Im}}/\Phi_{mn}^{\text{Re}}),$$

причому

$$d_{mn}^{\text{Re},0} = 1 - (s_{mn}^{\text{Re}} + 2\alpha \text{Nu})^2 + s_{mn}^{\text{Im},2} - \left\{ \left[1 - (s_{mn}^{\text{Re}} - 2\alpha \text{Nu})^2 + s_{mn}^{\text{Im},2} \right] \times \right. \\ \left. \times \cos(s_{mn}^{\text{Im}}\alpha^{-1}) - 2s_{mn}^{\text{Im}}(s_{mn}^{\text{Re}} - 2\alpha \text{Nu}) \sin(s_{mn}^{\text{Im}}\alpha^{-1}) \right\} e^{-s_{mn}^{\text{Re}}\alpha^{-1}},$$

$$d_{mn}^{\text{Im},0} = -2s_{mn}^{\text{Im}}(s_{mn}^{\text{Re}} + 2\alpha \text{Nu}) + \left\{ \left[1 - (s_{mn}^{\text{Re}} - 2\alpha \text{Nu})^2 + s_{mn}^{\text{Im},2} \right] \times \right. \\ \left. \times \sin(s_{mn}^{\text{Im}}\alpha^{-1}) + 2s_{mn}^{\text{Im}}(s_{mn}^{\text{Re}} - 2\alpha \text{Nu}) \cos(s_{mn}^{\text{Im}}\alpha^{-1}) \right\} e^{-s_{mn}^{\text{Re}}\alpha^{-1}},$$

$$d_{mn}^{\text{Re},1}(\zeta) = 1 + s_{mn}^{\text{Re}} + 2\alpha \text{Nu} - \left\{ (1 - s_{mn}^{\text{Re}} + 2\alpha \text{Nu}) \cos[s_{mn}^{\text{Im}}(1 - \zeta)\alpha^{-1}] - \right. \\ \left. - s_{mn}^{\text{Im}} \sin[s_{mn}^{\text{Im}}(1 - \zeta)\alpha^{-1}] \right\} e^{-s_{mn}^{\text{Re}}(1 - \zeta)\alpha^{-1}},$$

$$d_{mn}^{\text{Im},1}(\zeta) = s_{mn}^{\text{Im}} + \left\{ (1 - s_{mn}^{\text{Re}} + 2\alpha \text{Nu}) \sin[s_{mn}^{\text{Im}}(1 - \zeta)\alpha^{-1}] + \right. \\ \left. + s_{mn}^{\text{Im}} \cos[s_{mn}^{\text{Im}}(1 - \zeta)\alpha^{-1}] \right\} e^{-s_{mn}^{\text{Re}}(1 - \zeta)\alpha^{-1}},$$

$$d_{mn}^{\text{Re},2}(\zeta) = 1 - s_{mn}^{\text{Re}} - 2\alpha \text{Nu} - \left[(1 + s_{mn}^{\text{Re}} - 2\alpha \text{Nu}) \cos(s_{mn}^{\text{Im}}\zeta\alpha^{-1}) + \right. \\ \left. + s_{mn}^{\text{Im}} \sin(s_{mn}^{\text{Im}}\zeta\alpha^{-1}) \right] e^{-s_{mn}^{\text{Re}}\zeta\alpha^{-1}},$$

$$d_{mn}^{\text{Im},2}(\zeta) = -s_{mn}^{\text{Im}} + \left[(1 + s_{mn}^{\text{Re}} - 2\alpha \text{Nu}) \sin(s_{mn}^{\text{Im}}\zeta\alpha^{-1}) - \right. \\ \left. - s_{mn}^{\text{Im}} \cos(s_{mn}^{\text{Im}}\zeta\alpha^{-1}) \right] e^{-s_{mn}^{\text{Re}}\zeta\alpha^{-1}},$$

де

$$s_{mn}^{\text{Re}} = \left[(1 + \gamma^2 \mu_{mn}^2)^2 + (2\pi m \gamma^2 \text{Fo}_0^{-1})^2 \right]^{1/4} \times \\ \times \cos \left\{ \frac{1}{2} \arctg \left[2\pi m \gamma^2 \text{Fo}_0^{-1} (1 + \gamma^2 \mu_{mn}^2)^{-1} \right] \right\},$$

$$s_{mn}^{\text{Im}} = \left[(1 + \gamma^2 \mu_{mn}^2)^2 + (2\pi m \gamma^2 \text{Fo}_0^{-1})^2 \right]^{1/4} \times \\ \times \sin \left\{ \frac{1}{2} \arctg \left[2\pi m \gamma^2 \text{Fo}_0^{-1} (1 + \gamma^2 \mu_{mn}^2)^{-1} \right] \right\}.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $T_{in} = T_{out} = T_c$, формула (A.6) набуває вигляду

$$T_{00}(\zeta, \tau) \approx T_0 + \left[T_c - T_0 - \frac{q_0}{\pi \lambda \cos \varphi_0} c_{00} R_{00}^3(\zeta) \right] \left(1 - e^{-Fo\gamma^{-2}} \right),$$

$$0 < \zeta < 1, \quad Fo > 0, \quad (\text{A.10})$$

оскільки $R_{0n}^1(\zeta) + R_{0n}^2(\zeta) = 1$.

*Автор присвячує цю працю світлій пам'яті професора
Миколи Григоровича Крикуна.*

1. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. школа, 1967. – 599 с.
Te same: *Lui'kov A. V.* Analytical heat diffusion theory. – New York: Acad. Press, 1968. – 702 p.
2. *Піддубняк О. П., Піддубняк Н. Г.* Нестационарный розподіл температури в термоізолюваному концентричному циліндричному каналі з біомасою, що рухається під впливом обертання електрично нагрітої геліси // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2021. – **64**, № 1. – С. 107–123.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.1.107-123>.
Te same: *Piddubniak O. P., Piddubniak N. G.* Nonstationary temperature distribution in a thermally insulated concentric cylindrical channel with biomass moving under the influence of rotation of an electrically heated helix // *J. Math. Sci.* – 2023. – **274**, No. 5. – P. 708–729.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06631-7>.
3. *Aramideh S., Xiong Q., Kong S.-C., Brown R. C.* Numerical simulation of biomass fast pyrolysis in an auger reactor // *Fuel.* – 2015. – **156**. – P. 234–242.
– <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2015.04.038>.
4. *Bartolucci L., Cordiner S., Mele P., Mulone V.* Defatted spent coffee grounds fast pyrolysis polygeneration system: Lipid extraction effect on energy yield and products characteristics // *Biomass Bioenergy.* – 2023. – **179**. – Art. 106974.
– <https://doi.org/10.1016/j.biombioe.2023.106974>.
5. *Biogreen.* The pyrolyzer Spirajoule.
– <http://www.biogreen-energy.com/biogreen/spirajoule/>.
6. *Campuzano F., Brown R. C., Martinez J. D.* Auger reactors for pyrolysis of biomass and wastes // *Renew. Sustain. Energy Rev.* – 2019. – **102**. – P. 372–409.
– <https://doi.org/10.1016/j.rser.2018.12.014>.
7. *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conduction of heat in solids. – Oxford: Clarendon Press, 1959. – x+510 p.
8. *Cordiner S., Manni A., Mulone V., Rocco V.* Biomass fast pyrolysis process at laboratory scale: residence time and heating up evaluation in a shaftless screw reactor by means of a discrete element model approach // *Proc. CHT-17 ICHMT Int. Symp. on Advances Comput. Heat Transfer*, May 28 – June 1, 2017, Napoli, Italy. – Napoli, 2017. – P. 1071–1083.
– <https://doi.org/10.1615/ichmt.2017.cht-7.1180>.
9. *Dyke P. P. G.* An introduction to Laplace transforms and Fourier series. – London etc.: Springer Verlag, 2001. – xii +250 p.
10. *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* Table of integrals, series, and products / Eds. A. Jeffrey, D. Zwillinger. – Amsterdam etc.: Acad. Press, 2007. – xLvii+1171 p.
11. *Jiang E., Su X., Wang M., Xiong L., Zhao C., Xu X.* Design of variable pitch spiral conveyor for biomass continual pyrolysis reactor // *Trans. Chin. Soc. Agricult. Machinery.* – 2013. – **44**, No. 2. – P. 121–124 (in Chin. With Engl. Abstract).
– <https://doi.org/10.6041/j.issn.1000-1298.2013.02.023>.
12. *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems and formulas for reference and review. – Mineola–New York: Dover Publ., Inc., 2000. – xvii+1130 p.
13. *Ledakowicz S., Piddubniak O.* Analysis of non-stationary temperature field generated by a shaftless screw conveyor heated by Joule–Lenz effect // *Chem. Process Eng.* – 2021. – **42**, No. 2. – P. 119–137. – <https://doi.org/10.24425/cpe.2021.138920>.
14. *Ledakowicz S., Piddubniak O.* Temperature distribution in a finite-length cylindrical channel filled with biomass transported by electrically heated auger // *Energies (MDPI).* – 2023. – **16**, No. 17. – Art. 6260. – 23 p.
– <https://doi.org/10.3390/en16176260>.

15. *Luz F. C., Cordiner S., Manni A., Mulone V., Rocco V.* Biomass fast pyrolysis in a shaftless screw reactor: A 1-D numerical model // *Energy*. – 2018. – **157**. – P. 792–805. – <https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.05.166>.
16. *Makkawi Y., Pour F. H., Elsayed Y., Khan M., Moussa O., Masek O., Badrelzaman M., El Tahir W.* Recycling of post-consumption food waste through pyrolysis: Feedstock characteristics, products analysis, reactor performance, and assessment of worldwide implementation potentials // *Energy Convers. Manag.* – 2022. – **272**. – Art. 116348. – <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.116348>.
17. *Masmoudi A., Hammami M., Baccar M.* Numerical simulation of thermal and mass behaviors during pyrolysis homogeneous reaction within a screw reactor // *Arab. J. Sci. Eng.* – 2021. – **46**, No. 12. – P. 12549–12572. – <https://doi.org/10.1007/s13369-020-05295-8>.
18. *Moser K., Wopienka E., Pfeifer C., Schwarz M., Sedlmayer I., Haslinger W.* Screw reactors and rotary kilns in biochar production. – A comparative review // *J. Anal. Appl. Pyrolys.* – 2023. – **174**. – Art. 106112. – 19 p. – <https://doi.org/10.1016/j.jaap.2023.106112>.
19. *Nachenius R. W., van de Wardt T. A., Ronsse F., Prins W.* Residence time distributions of coarse biomass particles in a screw conveyor reactor // *Fuel Process. Technol.* – 2015. – **130**. – P. 87–95. – <https://doi.org/10.1016/j.fuproc.2014.09.039>.
20. *Nachenius R. W., van de Wardt T. A., Ronsse F., Prins W.* Torrefaction of pine in a bench-scale screw conveyor reactor // *Biomass Bioenergy*. – 2015. – **79**. – P. 96–104. – <https://doi.org/10.1016/j.biombioe.2015.03.027>.
21. *Pezo L., Jovanović A., Pezo M., Čolović R., Lončar B.* Modified screw conveyor-mixers – Discrete element modeling approach // *Adv. Powder Technol.* – 2015. – **26**, No. 5. – P. 1391–1399. – <https://doi.org/10.1016/j.aapt.2015.07.016>.
22. *Piddubniak O., Ledakowicz S.* Modeling of heat transfer from an electrically heated rotating helix in a circular cylindrical channel filled with a biomass moving at a constant velocity // *Therm. Sci. Eng. Progress*. – 2022. – **30**. – Art. 101265. – <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2022.101265>.
23. *Potnuri R., Suriapparao D. V., Rao C. S., Kumar T. H.* Understanding the role of modeling and simulation in pyrolysis of biomass and waste plastics: A review // *Bioresour. Technol. Rep.* – 2022. – **20**. – Art. 101221. – <https://doi.org/10.1016/j.biteb.2022.101221>.
24. *Raza M., Inayat A., Ahmed A., Jamil F., Ghenai C., Naqvi S. R., Shanableh A., Ayoub M., Waris A., Park Y.-K.* Progress of the pyrolyzer reactors and advanced technologies for biomass pyrolysis processing // *Sustainability (MDPI)*. – 2021. – **13**, No. 19. – Art. 11061. – 42 p. – <http://doi.org/10.3390/su131911061>.
25. *Romero M., German B., Rivadeneira D., Chulde D., Chico-Proano A., Narvaez R. A., Martinez-Gomez J.* Assessment of pilot-scale pyrolysis gas production as fuel for cogeneration // *Chem. Eng. Trans.* – 2022. – **92**. – P. 211–216. – <https://doi.org/10.3303/cet2292036>.
26. *Shaftless screw conveyors for pyrolysis of waste plastic and scrap tires.* – <https://www.kwsmfg.com/resources/problem-solvers/shaftless-screw-conveyors-for-pyrolysis-of-waste-plastic-and-scrap-tires/>.
27. *Shi X., Ronsse F., Nachenius R., Pieters J. G.* 3D Eulerian–Eulerian modeling of a screw reactor for biomass thermochemical conversion. Part 2: Slow pyrolysis for char production // *Renewable Energy*. – 2019. – **143**. – P. 1477–1487. – <https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.05.088>.
28. *Slezak R., Unyay H., Szufa S., Ledakowicz S.* An extensive review and comparison of modern biomass reactors torrefaction vs. biomass pyrolyzers – Part 2 // *Energies (MDPI)*. – 2023. – **16**, No. 5. – Art. 2212. – 25 p. – <https://doi.org/10.3390/en16052212>.
29. *Teo S. H., Gan H. L., Alias A., Gan L. M.* Internally heated screw pyrolysis reactor (IHSPR) heat transfer performance study // *IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering*. – 2018. – **342**. – Art. 012096. – 11 p. – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/342/1/012096>.
30. *Xiong Q., Aramideh S., Passalacqua A., Kong S.-C.* Characterizing effects of the shape of screw conveyors in gas-solid fluidized beds using advanced numerical models // *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. – 2015. – **137**, No. 6. – Art. 061008. – 7 p. – <https://doi.org/10.1115/1.4029864>.

31. Xiong Q., Kong S.-C., Passalacqua A. Development of a generalized numerical framework for simulating biomass fast pyrolysis in fluidized-bed reactors // Chem. Eng. Sci. – 2013. – **99**. – P. 305–313. – <https://doi.org/10.1016/j.ces.2013.06.017>.
32. Zhao F., Li Y., Liu Z. Numerical study on pyrolysis characteristics of oil-based drilling cuttings in a two-layer screw-driving spiral heat exchanger // Clean Energy Sustainability. – 2024. – **2**, No. 2. – Art. 10008. – 26 p. – <https://doi.org/10.35534/ces.2024.10008>.

**TEMPERATURE FIELD IN A CIRCULAR CYLINDRICAL CHANNEL
OF FINITE LENGTH FILLED WITH A DISPERSED MASS TRANSFERRED
AS A RESULT OF THE ROTATION OF AN INDUCTION HEATED HELIX**

Analysis of the temperature field distribution in a cylindrical circular channel of finite length, filled with a dispersed mass moving in the axial direction at a constant velocity due to the rotation of an induction heated helix, is performed. It is assumed that the point heat sources are continuously distributed along the helix. It is supposed that the lateral surface of the channel is thermally insulated, and boundary conditions of the third kind for temperature are fulfilled at its inlet and outlet. To solve the corresponding heat conduction problem, the method of Fourier–Bessel series expansions of the unknown function into angular and radial variables, as well as the integral Laplace transform over time, is used. The sequence of differential equations in transforms is solved by replacing the unknown functions in such a way that inhomogeneous ordinary differential equations turn into homogeneous ones. As a result of the transition to the field of the originals, an exact solution of the problem is obtained, which is replaced by an approximate one for practical reasons of a numerical nature. A detailed numerical analysis of the spatial and temporal characteristics of the temperature field is performed. It is shown that in this problem, the duration of the transient process is inversely proportional to the square of mass velocity motion, and the amplitudes of temperature oscillations in the quasi-stationary regime are rather weak. However, these oscillations are clearly appear when they are analyzed in certain directions, and especially in the conditions of space-time resonance appropriately selected velocities of rotation of the helix and rectilinear motion of the dispersed mass. The effect of local temperature increase at low velocities of mass movement is also established.

Key words: screw reactor, helix, electric heating, non-stationary temperature field, mathematical modeling, numerical analysis.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.10.23