

ТЕРМОСИЛОВЕ ДЕФОРМУВАННЯ НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, ЗАХИЩЕНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИМ МАТЕРІАЛОМ

При використанні модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідуз отримано неоднорідну тривимірну систему диференціальних рівнянь рівноваги, застосування якої дає змогу досліджувати напружено-деформований стан композитної циліндричної анізотропної оболонки при заданих на торцях силовому та температурному впливах. Анізотропія матеріалу оболонки характеризується однією площиною пружної симетрії у кожному шарі. Вихідну тривимірну систему рівнянь рівноваги зведено до одновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку відносно радіальної координати за допомогою методу Бубнова – Гальоркіна. Отриману крайову задачу розв'язано чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати розрахунку напружено-деформованого стану анізотропної циліндричної композитної боропластикової оболонки, захищеної від дії температурного поля високої інтенсивності шаром нанокерамічного функціонально-градієнтного матеріалу.

Ключові слова: анізотропна циліндрична оболонка, тривимірна постановка, термосилова дія, нанокерамічний функціонально-градієнтний матеріал.

Вступ. Типовий функціонально-градієнтний матеріал (ФГМ) [10, 18] є неоднорідним композитом, виготовленим із різних матеріальних складових, як правило кераміки та металу. Керамічні складові ФГМ здатні протистояти високотемпературному впливу завдяки кращим характеристикам термостійкості, а його металеві складові забезпечують високі механічні показники. При виготовленні ФГМ для армування керамічної матриці можливе використання наноматеріалів, наприклад вуглецевих нанотрубок [15–17]. У роботі [13] досліджено зв'язок між покращенням механічних властивостей матеріалу та збільшенням об'ємної частки вуглецевих нанотрубок. Зазначено, що модуль пружності нанокомпозита з орієнтованими нанотрубками є майже вп'ятеро більшим порівняно з матеріалом, в якому нанотрубки мають довільну орієнтацію.

У дослідженнях [9, 11, 12] в рамках просторової теорії пружності проаналізовано напружено-деформований стан циліндричних оболонкових конструкцій із ФГМ, що перебувають під дією механічних і термомеханічних навантажень. У роботі [5] у тривимірній постановці встановлено динамічні характеристики циліндрів з ФГМ з урахуванням зміни їхніх властивостей залежно від температури. У роботі [1] на основі висновків [13] вказано на те, що всі вуглецеві нанотрубки можна розташувати у матеріалі за деяким наперед вибраним напрямком так, щоб новостворений матеріал у своїх власних осях набував властивостей ортотропного. Цей результат використано при дослідженні частот вільних коливань циліндричних оболонок із таких ФГМ. У припущенні ізотропії чи ортотропії матеріалу досліджено напружено-деформований стан [9, 11, 12] та динаміку [1, 5] оболонкових конструкцій.

ФГМ ефективно використовують як захисний шар у композитних оболонкових конструкціях, які зазнають інтенсивного теплового впливу. Цей факт загострює проблему дослідження термпружної поведінки анізотропних оболонок із волокнистих композитів, захищених шаром нанокерамічного ФГМ на поверхнях, які зазнають теплового впливу.

[✉] a.v.podvornyi@nuwm.edu.ua

Тут наведено підхід до дослідження у просторовій постановці напружено-деформованого стану нетонкої анізотропної шаруватої циліндричної оболонки, яка зазнає термосилового впливу. Конструкцію виготовлено з шарів однонапрявленого волокнистого композита, укладеного під певним кутом до твірної (рис. 1). Також за товщиною h конструкції укладено шар ФГМ (нано-кераміки), який задовольняє вимогам [1, 13] і може бути укладеним під кутом до твірної. У цьому випадку необхідно враховувати ефект конструктивної анізотропії, спричинений розбіжністю між напрямками армування та осями оболонки [2, 3, 7, 8], який дає змогу скористатися моделлю матеріалу з однією площиною пружної симетрії. Згідно з узагальненим законом Гука для такого матеріалу деформації розтягу (стиску) і зсуву, згину та кручення є взаємопов'язаними. Водночас важливо оцінити вплив сумісної дії силового навантаження та температури на таку конструкцію.

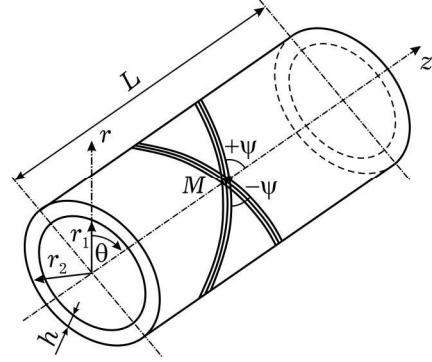


Рис. 1. Нетонка анізотропна циліндрична оболонка.

1. Постановка задачі та методика розв'язання. Згідно з варіаційним принципом Ху – Васідзу [21] рівняння рівноваги, співвідношення пружності (рівняння стану), геометричні співвідношення та відповідні межові умови можна отримати з умови стаціонарності функціонала

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \iiint_V \left\{ W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) \right] \right\} dV + \\ & + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) на варіації переміщення u_i , деформації e_{ij} , напруження σ_{ii} та напруження p_i на поверхні S_2 , що викликані переміщеннями \bar{u}_i , не накладено додаткових умов. Тут $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформації, $T(u_i)$ – кінетична енергія, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ – потенціали переміщень, крапка з комою перед параметрами i, j позначає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j = 1, 2, 3$.

Потенціальна енергія деформації у векторно-матричному поданні записується так:

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}^\top = (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{rr}, 2\varepsilon_{r\theta}, 2\varepsilon_{rz}, 2\varepsilon_{z\theta})$ – вектор деформацій, $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1,\dots,6}$ – матриця коефіцієнтів пружності.

Увівши вектор напружень $\boldsymbol{\sigma}^\top = (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{z\theta})$, з умови стаціонарності $\delta\Pi_1 = 0$ отримуємо рівняння

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (4)$$

$$\sigma_{ij;j} + f_i = 0 \quad (5)$$

та межові умови $\sigma_{ij}n_j = F_i$ на поверхні S_1 шару n_j і $u_i = \bar{u}_i$, $\sigma_{ij}n_j = p_i$ на поверхні S_2 , де F_i – силосе навантаження поверхні S_1 , \mathbf{G} – матриця коефіцієнтів, що враховують температурну дію на оболонку.

Співвідношення (4) описують взаємозв'язок між деформаціями та переміщеннями. При записі обернених до співвідношень (3) залежностей деформацій від напружень згідно з гіпотезою Дюгамеля – Неймана врахуємо температурну дію на оболонку

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}, \quad (6)$$

де $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,6} = \mathbf{B}^{-1}$, а вектор $\mathbf{g}^\top = (g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{23}, g_{13}, g_{12})$ характеризує температурну дію на конструкцію, де

$$g_{ii} = \alpha_i t, \quad g_{1j} = \alpha_{1j} t, \quad g_{23} = \alpha_{23} t, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 2, 3,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – коефіцієнти лінійного температурного розширення відповідно у напрямках z, θ, r (рис. 1), $\alpha_{ij}, i \neq j$, – коефіцієнти лінійного температурного зсуву, t – температура, що відраховується від температури вихідного недеформованого стану.

Зауважимо, що матриці \mathbf{A} та \mathbf{B} є симетричними.

Відповідно до підходу [2, 7], при використанні модифікованого змішаного варіаційного принципу Ху – Васідзу подамо вектори $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ та \mathbf{g} у вигляді суперпозиції двох частин:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1^\top &= (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}), & \boldsymbol{\sigma}_2^\top &= (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}), \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1^\top &= (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}), & \boldsymbol{\varepsilon}_2^\top &= (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{z\theta}), \\ \mathbf{g}_1^\top &= (g_{33}, g_{23}, g_{13}), & \mathbf{g}_2^\top &= (g_{11}, g_{22}, g_{12}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для спрощення запису співвідношення термопружності (6) та подібні записуватимемо у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}.$$

У цій формулі для анізотропного матеріалу з однією площиною пружної симетрії для блоків \mathbf{A}_{ij} матриці \mathbf{A} в (6) отримуємо згідно з поданням (7) такі вирази:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & 0 \\ a_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді вираз для потенціалу $W(e_{ij})$ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} W_1 &= W(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2) - \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_1^\top B_{11}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_1 - \\ &\quad -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_2^\top (B_{22} - B_{12}^\top B_{11}^{-1} B_{12})\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1^\top(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_2^\top(\mathbf{u}) B_{12}^\top B_{11}^{-1} \right] \boldsymbol{\sigma}_1 + \\ &\quad + \boldsymbol{\varepsilon}_2^\top(\mathbf{u}) (B_{22} - B_{12}^\top B_{11}^{-1} B_{12})\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{G}_1^\top B_{11}^{-1\top} \boldsymbol{\sigma}_1 - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{G}_1\mathbf{B}_{11}^{-1\top}\boldsymbol{\sigma}_1^\top + \frac{1}{2}\mathbf{G}_1^2\mathbf{B}_{11}^{-1} - \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1^\top(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_2^\top(\mathbf{u})\mathbf{B}_{12}^\top\mathbf{B}_{11}^{-1\top} \right] \mathbf{G}_1.$$

Тут \mathbf{B}_{ij} , \mathbf{G}_i , $i, j = 1, 2$, – матриці коефіцієнтів пружності та врахування температурного впливу.

Відповідно до (1) запишемо потенціал поверхневих навантажень

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2 = \iint_{S_1} \left[(q_r^- u_r + q_0^- u_0 + q_z^- u_z, h_1) + \right. \\ \left. + (q_r^+ u_r + q_0^+ u_0 + q_z^+ u_z, h_{n+1}) \right] dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут u_r , u_0 , u_z – переміщення у напрямках вибраної циліндричної системи координат (рис. 1), h_1 та h_{n+1} – координати поверхонь першого та $(n+1)$ -го шарів оболонки, q_r^\pm , q_0^\pm , q_z^\pm – навантаження на бічних поверхнях оболонки, де знак «+» вказує на співнаправленість дії з відповідним координатним напрямком, а «-» – на протилежно напрямлену дію.

Виконавши варіювання потенціалу поверхневих навантажень (8), отримаємо варіацію роботи зовнішніх сил

$$\begin{aligned} \delta \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 = \iint_{S_1} (q_r \delta u_r + q_0 \delta u_0 + q_z \delta u_z) dS_1 + \\ + \iint_{S_2} \sum_{i=1}^3 p_i (\delta u_i - \delta \bar{u}_i) dS_2, \end{aligned} \quad (9)$$

де $q_r = q_r^- + q_r^+$, $q_0 = q_0^- + q_0^+$, $q_z = q_z^- + q_z^+$, а $p_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Надалі знехтуємо потенціалом об'ємних навантажень $\Phi(u_i)$. Тоді функціонал (1) набуде вигляду

$$\Pi_1 = \iiint_V \left[W(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}) - T(u_i) \right] dV - \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2. \quad (10)$$

Вираз (10) є частковим випадком (1), оскільки внаслідок виконання умови $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{u})$ у ньому зменшено кількість незалежних величин. Варіація функціонала (10), що обумовлена зміною компонент векторів переміщень \mathbf{u} і напружень $\boldsymbol{\sigma}_1$, набуває вигляду

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 = \iiint_V \left\{ \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_1^\top \mathbf{B}_{11}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_1 + \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1^\top(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{u})\mathbf{B}_{11}^\top\mathbf{B}_{12}^{-1} \right] \boldsymbol{\sigma}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{G}_1^\top \mathbf{B}_{11}^{-1\top} \boldsymbol{\sigma}_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \mathbf{G}_1 \mathbf{B}_{11}^{-1\top} \boldsymbol{\sigma}_1^\top \right] \delta \boldsymbol{\sigma}_1 - \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2^\top (\mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{12}^\top \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12}) \boldsymbol{\varepsilon}_2 \right] \delta \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \right. \\ \left. + \left[\boldsymbol{\varepsilon}_2^\top(\mathbf{u}) (\mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{12}^\top \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12}) \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - (\boldsymbol{\varepsilon}_1^\top(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_2^\top(\mathbf{u})\mathbf{B}_{12}^\top\mathbf{B}_{11}^{-1\top}) \mathbf{G}_1 \right] \delta \mathbf{u} - T(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \right\} dV + \\ + \iint_{S_1} \Psi(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} dS_1 - \iint_{S_2} p_i(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \delta p dS_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Далі використаємо лінійні геометричні співвідношення [6]:

$$\begin{aligned}
e_{zz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}, & e_{\theta\theta}^i &= \frac{1}{r}(u_{\theta,0}^i + u_r^i), & e_{rr}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}, \\
e_{z\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}, & e_{rz}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}, \\
e_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Тут e_{zz}^i , $e_{\theta\theta}^i$, e_{rr}^i – відносні лінійні деформації у напрямках z , θ , r , а $e_{z\theta}^i$, e_{rz}^i , $e_{r\theta}^i$ – відносні зсувні деформації i -го шару, дотичні до відповідних координатних поверхонь.

З умови стаціонарності (11), використовуючи вирази для σ_1^\top , $\mathbf{u}^\top = (u_r, u_\theta, u_z)$, геометричних співвідношень (12) та залежностей для варіації роботи зовнішніх сил (9) і прирівнюючи вирази при незалежних варіаціях напружень $\delta\sigma_{rr}$, $\delta\tau_{r\theta}$, $\delta\tau_{rz}$ та переміщень δu_r , δu_θ , δu_z в інтегралі за об'ємом V до нуля, отримуємо такі рівняння:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr,r}^i &= -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \tau_{rz,z}^i - \frac{1}{r} \tau_{r\theta,0}^i + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} u_{z,z}^i + \frac{c_{26}^i}{r^2} u_{z,\theta}^i + \\
&\quad + \frac{c_{26}^i}{r} u_{\theta,z}^i + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_{\theta,0}^i - \frac{\beta_{22}^i}{r} t + \rho^i \omega^2 u_r + q_r, \\
\tau_{rz,r}^i &= c_{13}^i \sigma_{rr,z}^i - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} u_{r,z}^i - c_{11}^i u_{z,zz}^i - \frac{c_{66}^i}{r^2} u_{z,\theta\theta}^i - \\
&\quad - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} u_{\theta,z\theta}^i + \frac{c_{36}^i}{r} \sigma_{rr,\theta}^i - \frac{c_{26}^i}{r^2} u_{r,\theta}^i - \\
&\quad - \frac{2c_{16}^i}{r} u_{z,z\theta}^i - c_{16}^i u_{\theta,zz}^i - \frac{c_{26}^i}{r^2} u_{\theta,0\theta}^i + \rho^i \omega^2 u_z + q_z, \\
\tau_{r\theta,r}^i &= \frac{c_{23}^i}{r} \sigma_{rr,\theta}^i - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} u_{r,\theta}^i - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} u_{z,z\theta}^i - c_{66}^i u_{\theta,zz}^i - \\
&\quad - \frac{c_{22}^i}{r^2} u_{\theta,0\theta}^i + c_{36}^i \sigma_{rr,z}^i - \frac{c_{26}^i}{r} u_{r,z}^i - c_{16}^i u_{z,zz}^i - \\
&\quad - \frac{c_{26}^i}{r^2} u_{z,\theta\theta}^i - \frac{2c_{26}^i}{r} u_{\theta,z\theta}^i + \rho^i \omega^2 u_\theta + q_\theta, \\
u_{r,r}^i &= c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i u_{z,z}^i + \frac{c_{36}^i}{r} u_{z,\theta}^i + c_{36}^i u_{\theta,z}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_{\theta,0}^i + \\
&\quad + \alpha_{rr}^i t - a_{13}^i \beta_{11}^i t - a_{23}^i \beta_{22}^i t - a_{36}^i \beta_{12}^i t, \\
u_{z,r}^i &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - u_{r,z}^i + \alpha_{zr}^i t, \\
u_{\theta,r}^i &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} u_{r,\theta}^i + \frac{1}{r} u_{\theta,0}^i + \alpha_{\theta r}^i t.
\end{aligned} \tag{13}$$

Тут σ_{rr}^i , τ_{rz}^i , $\tau_{r\theta}^i$ та u_z^i , u_θ^i , u_r^i – відповідно компоненти тензора напружень та вектора переміщення точок i -го шару оболонки за напрямками осей циліндричної системи координат z , θ , r (рис. 1), ω є частотою вільних коливань, ρ^i – густина матеріалу i -го шару оболонки, $\alpha_{\theta\theta}^i$, α_{zz}^i , $\alpha_{z\theta}^i$, α_{zr}^i , $\alpha_{\theta r}^i$ – коефіцієнти лінійного температурного розширення та зсуву матеріалу i -го шару оболонки, пов'язані зі значеннями $\alpha_{k\ell}^i$, $k, \ell = 1, 2, 3$, для ортотропного матеріалу залежностями [3], $c_{k\ell}^i$, $k, \ell = 1, 2, 3, 6$, – характеристики i -го шару, що визначаються за допомогою механічних констант $a_{k\ell}^i$ [14], пов'язаних з пружними модулями властивостями [3]

$$\begin{aligned} c_{11}^i &= \frac{1}{|\Delta_{22}^i|} (a_{22}^i a_{66}^i - (a_{26}^i)^2), & c_{12}^i &= \frac{1}{|\Delta_{22}^i|} (a_{16}^i a_{26}^i - a_{12}^i a_{66}^i), \\ c_{22}^i &= \frac{1}{|\Delta_{22}^i|} (a_{11}^i a_{66}^i - (a_{16}^i)^2), & c_{16}^i &= \frac{1}{|\Delta_{22}^i|} (a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i), \\ c_{26}^i &= \frac{1}{|\Delta_{22}^i|} (a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i), & c_{66}^i &= \frac{1}{|\Delta_{22}^i|} (a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2), \\ |\Delta_{22}^i| &= a_{66}^i (a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2) + a_{26}^i (a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i) + \\ &\quad + a_{16}^i (a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i), \\ c_{13}^i &= a_{13}^i c_{11}^i + a_{23}^i c_{12}^i + a_{36}^i c_{16}^i, & c_{23}^i &= a_{13}^i c_{12}^i + a_{23}^i c_{22}^i + a_{36}^i c_{26}^i, \\ c_{36}^i &= a_{13}^i c_{16}^i + a_{23}^i c_{26}^i + a_{36}^i c_{66}^i, & c_{33}^i &= a_{33}^i - (a_{13}^i c_{13}^i + a_{23}^i c_{23}^i + a_{36}^i c_{36}^i), \end{aligned} \quad (14)$$

β_{11}^i , β_{22}^i , β_{12}^i – термopружні коефіцієнти i -го шару оболонки, пов'язані з температурою t [°K] залежностями [3]

$$\begin{aligned} \beta_{11}^i &= c_{11}^i \alpha_{zz}^i + c_{12}^i \alpha_{\theta\theta}^i + c_{16}^i \alpha_{z\theta}^i, \\ \beta_{22}^i &= c_{12}^i \alpha_{zz}^i + c_{22}^i \alpha_{\theta\theta}^i + c_{26}^i \alpha_{z\theta}^i, \\ \beta_{12}^i &= c_{16}^i \alpha_{zz}^i + c_{26}^i \alpha_{\theta\theta}^i + c_{66}^i \alpha_{z\theta}^i. \end{aligned}$$

Таким чином, з використанням (11) та варіаційного принципу Ху – Васіду виведено тривимірну неоднорідну систему руху лінійної теорії пружності (13) із шести диференціальних рівнянь. Цю систему записано у частинних похідних відносно компонент векторів $\sigma_1^\top = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ і $\mathbf{u}^\top = (u_r, u_\theta, u_z)$. Після нехтування складовими, які пов'язані з ω , її можна використати для дослідження напружено-деформованого стану, який виникає внаслідок силового та/або температурного впливу на анізотропні шаруваті товстостінні композитні циліндричні оболонки.

Розв'язок системи (13) повинен задовольняти умови:

– на бічних поверхнях при $r = r_1$, $r = r_2$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) &= q_r^0(z), & \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) &= q_z^0(z), & \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) &= q_\theta^0(z), \\ \sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) &= q_r^n(z), & \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) &= q_z^n(z), & \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) &= q_\theta^n(z); \end{aligned} \quad (15)$$

– на торцях при $z = 0$, $z = L$ (рис. 1)

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0; \quad (16)$$

– ідеального контакту

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i), & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i), & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i), \\ u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i), & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i), & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i),\end{aligned}$$

де i – номер шару оболонки. У (15) $q_r^0(z)$, $q_r^n(z)$ – розподілені на бічних поверхнях оболонки внутрішній та зовнішній тиски.

Співвідношення узагальненого закону Гука для матеріалу з однією площиною пружної симетрії запишемо на основі залежностей (6) з урахуванням температурного впливу та з використанням позначень (14):

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i + \beta_{11}^i t, \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i + \beta_{22}^i t, \\ \tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i + \beta_{12}^i t, \\ e_{rr}^i &= c_{13}^i e_{zz}^i + c_{23}^i e_{\theta\theta}^i + c_{36}^i e_{z\theta}^i + c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \\ &\quad + \alpha_{rr}^i t + a_{13}^i \beta_{11}^i t + a_{23}^i \beta_{22}^i t + a_{36}^i \beta_{12}^i t, \\ e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i + \alpha_{zr}^i t, & e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i + \alpha_{z\theta}^i t.\end{aligned}\quad (17)$$

Для розв'язання системи рівнянь (13) із умовами (15), (16) скористаємось методом Бубнова – Гальоркіна. Розвинемо всі функції в подвійні тригонометричні ряди за координатами z та θ так, щоб задовольнити вказані умови:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1\cdot mk}^i(r) \cos k\theta + y_{1\cdot mk}^{i/}(r) \sin k\theta \right] \sin \ell_m z, \\ \tau_{rz}^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{2\cdot mk}^i(r) \cos k\theta + y_{2\cdot mk}^{i/}(r) \sin k\theta \right] \cos \ell_m z, \\ \tau_{r\theta}^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{3\cdot mk}^i(r) \sin k\theta + y_{3\cdot mk}^{i/}(r) \cos k\theta \right] \sin \ell_m z, \\ u_r^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4\cdot mk}^i(r) \cos k\theta + y_{4\cdot mk}^{i/}(r) \sin k\theta \right] \sin \ell_m z, \\ u_z^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5\cdot mk}^i(r) \cos k\theta + y_{5\cdot mk}^{i/}(r) \sin k\theta \right] \cos \ell_m z, \\ u_\theta^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6\cdot mk}^i(r) \sin k\theta + y_{6\cdot mk}^{i/}(r) \cos k\theta \right] \sin \ell_m z.\end{aligned}\quad (18)$$

Тут $y_{p\cdot mk}^i$, $y_{p\cdot mk}^{i/}$, $p = 1, \dots, 6$, – коефіцієнти розвинення в тригонометричні ряди Фур'є складових напружено-деформованого стану, m , k – хвильові числа, $\ell_m = m\pi/L$, L – довжина твірної оболонки (рис. 1), а крапкою відокремлено хвильові числа від іншого індексу.

Досліджуватимемо циліндричні оболонки у просторовій постановці зі сталою уздовж твірної та в коловому напрямку температурою. При цьому вважатимемо напружено-деформований стан (НДС) вісесиметричним. З урахуванням зроблених припущень із рівнянь (13) за допомогою співвідношень (18) отримаємо для i -го шару систему звичайних диферен-

ціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі Коші

$$\mathbf{y}_{,r}^i = \mathbf{D}^i(r)\mathbf{y}^i + f^i, \quad \mathbf{D}^i(r) = \{d_{n,\ell}^i(r)\}_{n,\ell=1,\dots,12}, \quad (19)$$

де $\mathbf{y}^i = \{y_{1,p}^i, y_{2,p}^i, y_{3,p}^i, y_{4,p}^i, y_{5,p}^i, y_{6,p}^i, y_{1,m}^i, y_{2,m}^i, y_{3,m}^i, y_{4,m}^i, y_{5,m}^i, y_{6,m}^i\}$ – визначальна вектор-функція, $\mathbf{D}^i(r)$ – квадратна матриця зі змінними коефіцієнтами, що залежать від аргумента r , f^i – компоненти напруженого стану, пов'язані з температурою в системі (13).

Разом із системою (19) потрібно розглянути межові умови на поверхнях оболонки, записані у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 \mathbf{y}^i(r) &= 0, & r &= r_1, \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{y}^i(r) &= 0, & r &= r_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ – матриці розміру 6×12 , що формуються на основі межових умов (15) на поверхнях оболонки.

Система (19) з умовами (20) дає змогу визначати компоненти вектора \mathbf{y}^i , які з огляду на (18) забезпечують визначення напружено-деформованого стану оболонки. Розв'язок отриманої одновимірної векторної задачі будемо із використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації [4]. Після знаходження $\sigma_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i$ та u_r^i, u_z^i, u_θ^i за формулами (18) напруження $\sigma_{zz}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \tau_{z\theta}^i$ визначимо з використанням співвідношень узагальненого закону Дюгамеля – Неймана (17).

2. Числова реалізація методики. Дослідимо НДС циліндричної оболонки, виготовленої з шару волокнистого боропластику та шару нанокерамічного ФГМ, під дією розподіленого зовнішнього тиску та температурного поля. Механічні характеристики однонапрявленого волокнистого боропластику є такими:

$$\begin{aligned} E_{zz} &= 280E_0, & E_{\theta\theta} &= E_{rr} = 31E_0, & G_{z\theta} &= G_{r\theta} = 10.5E_0, \\ G_{rz} &= 21.2E_0, & v_{\theta z} &= 0.25, & v_{z\theta} &= 0.0277, \\ E_0 &= 10^3 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Керамічною складовою ФГМ вибрано нітрид силікону з такими фізико-механічними характеристиками за температури вихідного недеформованого стану $t = 293 \text{ }^\circ\text{K}$:

$$E^M = 322.77E_0, \quad v^M = 0.24, \quad \alpha^M = 7.4372 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

Характеристики нанотрубок є такими [1]:

$$\begin{aligned} E_{zz}^{\text{CNT}} &= 5646.6E_0, & E_{\theta\theta}^{\text{CNT}} &= E_{rr}^{\text{CNT}} = 7080E_0, \\ G_{r\theta}^{\text{CNT}} &= 2333.4E_0, & G_{z\theta}^{\text{CNT}} &= G_{rz}^{\text{CNT}} = 1944.5E_0, \\ v_{\theta z}^{\text{CNT}} &= 0.175, & \alpha_1^{\text{CNT}} &= 2.0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \\ \alpha_2^{\text{CNT}} &= \alpha_3^{\text{CNT}} = 0.64 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, & \alpha_{13}^{\text{CNT}} &= \alpha_{23}^{\text{CNT}} = 0, \end{aligned}$$

а об'ємний вміст нанотрубок $V_{\text{CNT}}^* = 0.12$. Фізико-механічні характеристики отриманого ФГМ є залежними від координати r і визначаються за формулами [19, 20]:

$$E_{zz}(r) = \eta_1 V_{\text{CNT}}(r) E_{zz}^{\text{CNT}} + V_M(r) E^M,$$

$$\begin{aligned}
E_{rr}(r) = E_{\theta\theta}(r) &= \frac{\eta_2 E_{\theta\theta}^{\text{CNT}} E^{\text{M}}}{V_{\text{CNT}}(r) E^{\text{M}} + V_{\text{M}}(r) E_{\theta\theta}^{\text{CNT}}}, \\
G_{rz}(r) = G_{z\theta}(r) &= \frac{\eta_3 G_{z\theta}^{\text{CNT}} G^{\text{M}}}{V_{\text{CNT}}(r) G^{\text{M}} + V_{\text{M}}(r) G_{z\theta}^{\text{CNT}}}, \\
G_{r\theta}(r) &= \frac{\eta_3 G_{r\theta}^{\text{CNT}} G^{\text{M}}}{V_{\text{CNT}}(r) G^{\text{M}} + V_{\text{M}}(r) G_{r\theta}^{\text{CNT}}}, \\
v_{z\theta}(r) = V_{\text{CNT}}(r) v_{z\theta}^{\text{CNT}} + V_{\text{M}}(r) v^{\text{M}}, \quad v_{\theta z}(r) &= \frac{v_{z\theta}(r)}{E_{zz}(r)} E_{\theta\theta}(r), \\
v_{rz}(r) &= V_{\text{CNT}}(r) v_{rz}^{\text{CNT}} + V_{\text{M}}(r) v^{\text{M}}, \\
v_{r\theta}(r) &= V_{\text{CNT}}(r) v_{r\theta}^{\text{CNT}} + V_{\text{M}}(r) v^{\text{M}}, \\
\alpha_1(r) &= V_{\text{CNT}}(r) \alpha_1^{\text{CNT}} + V_{\text{M}}(r) \alpha^{\text{M}}, \\
\alpha_2(r) &= (1 + v_{z\theta}^{\text{CNT}}) V_{\text{CNT}}(r) \alpha_2^{\text{CNT}} + (1 + v^{\text{M}}) V_{\text{M}}(r) \alpha_2^{\text{M}} - v_{z\theta}(r) \alpha_1(r), \\
\alpha_3(r) &= (1 + v_{zr}^{\text{CNT}}) V_{\text{CNT}}(r) \alpha_3^{\text{CNT}} + (1 + v^{\text{M}}) V_{\text{M}}(r) \alpha^{\text{M}} - v_{zr}(r) \alpha_1(r), \\
V_{\text{CNT}}(r) &= \left(1 + \frac{r - r_{0\text{CNT}}}{h_{\text{CNT}}}\right) V_{\text{CNT}}^*, \quad V_{\text{M}}(r) = 1 - V_{\text{CNT}}(r). \tag{21}
\end{aligned}$$

У (21) $V_{\text{CNT}}(r)$ – об’ємна частка нанотрубок, яка для кожного значення r визначається залежно від сукупної об’ємної частки нанотрубок V_{CNT}^* в матеріалі згідно з [19], $r_{0\text{CNT}}$ – координата внутрішньої поверхні шару ФГМ, h_{CNT} – товщина шару ФГМ; $E_{zz}(r)$, $E_{\theta\theta}(r)$, $E_{rr}(r)$, $G_{z\theta}(r)$, $G_{rz}(r)$, $G_{r\theta}(r)$, $v_{\theta z}(r)$, $v_{z\theta}(r)$, $\alpha_i(r)$ – модулі пружності, зсуву та коефіцієнти Пуассона і лінійного температурного розширення нанокерамічного матеріалу, η_1 , η_2 , η_3 – параметри ефективності наноармування, які взято такими: $\eta_1 = 0.137$, $\eta_2 = 1.022$, $\eta_3 = 0.715$.

Вважаємо, що розташування нанотрубок за товщиною шару відповідає типу армування FGL [1] і таким чином шар матеріалу має властивості функціонально-градієнтного композитного матеріалу.

Розраховано циліндричну оболонку з такими геометричними параметрами (рис. 1): $L = 1.2$ м, $r_1 = 0.54$ м, $r_2 = 0.66$ м. Циліндр складено з двох шарів: внутрішнього $r_1 = 0.54$ м, $r_{11} = 0.64$ м – з волокнистого боропластику, укладеного під кутом $\psi = 60^\circ$ до осі z , та зовнішнього $r_{12} = 0.64$ м, $r_2 = 0.66$ м – з нанокерамічного функціонально-градієнтного матеріалу, вісі ортотропії якого також повернуто на кут $\psi = 60^\circ$ до осі z оболонки.

Проаналізовано два варіанти розрахунків: з урахуванням лише температурного впливу та у випадку сумісної термосилової дії.

При врахуванні лише температурного впливу на циліндр температура змінювалась тільки за товщиною функціонально-градієнтної складової матеріалу від $t = 293$ °К при $r_{12} = 0.64$ м до $t = 393$ °К при $r_2 = 0.66$ м.

При термосиловому впливі оболонкова конструкція зазнала не лише дії розглянутого вище температурного впливу, змінного за товщиною шару

ФГМ, але й розподіленого по зовнішній поверхні тиску $q = -q_0 \sin(\pi z/L)$, де $q_0 = 10$ МПа.

На рис. 2 наведено розподіли максимальних значень напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ та переміщень u_r за товщиною анізотропної циліндричної оболонки при $z = 0.5L$ за температурного (крива 1) та термосилового (крива 2) впливу.

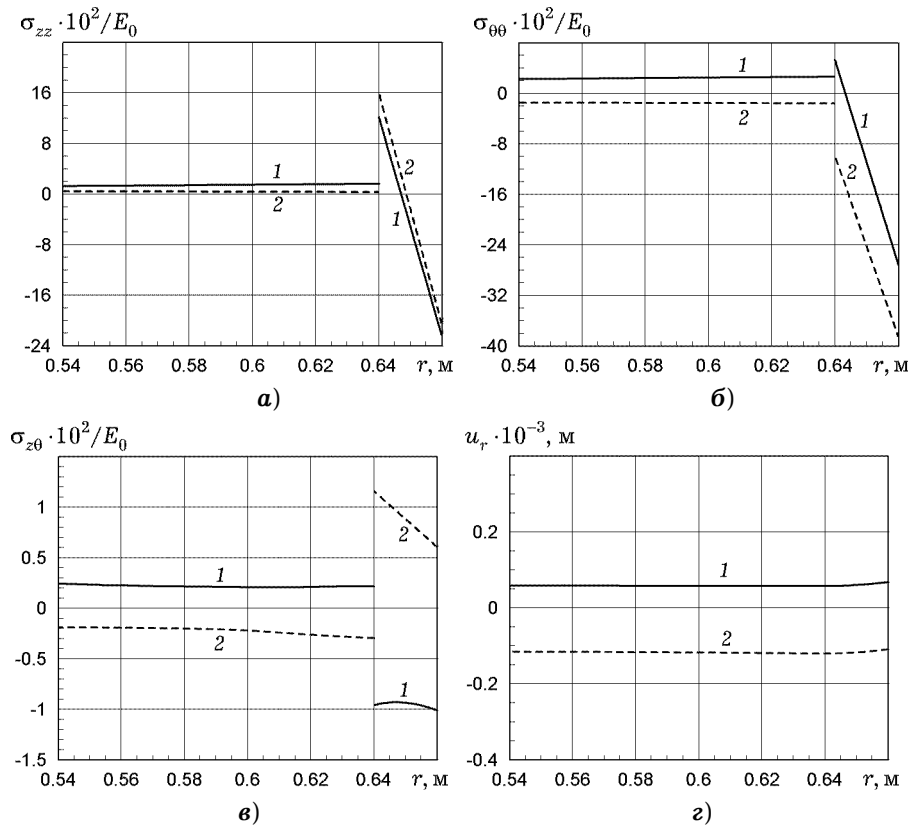


Рис. 2. Розподіл компонентів **1** – термічного, **2** – термосилового напружено-деформованого стану за товщиною двошарової із зовнішнім шаром ФГМ оболонки: **а)** σ_{zz} , **б)** $\sigma_{\theta\theta}$, **в)** $\tau_{z\theta}$, **г)** u_r .

З аналізу наведених на рис. 2 результатів можемо зробити такі висновки. Сумісний вплив тиску на бічну поверхню та температури приводить до перерозподілу величин параметрів напружено-деформованого стану розглядуваних конструкцій порівняно з температурним впливом. Нормальні напруження σ_{zz} (рис. 2а) та $\sigma_{\theta\theta}$ (рис. 2б) зростають порівняно з силовою дією. Водночас у захисному шарі з нанокерамічного ФГМ напруження σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$ приймають більші значення, ніж у шарі з боропластику. Максимальні розбіжності складають приблизно 98%. Дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ у випадку лише температурної дії розподіляються в межах захисного шару практично рівномірно (рис. 2в, крива 1). При спільній дії температури та навантаження вони зростають за абсолютними значеннями у напрямку від поверхні, що знаходиться під впливом температурного поля вищої інтенсивності (рис. 2в, крива 2). Розбіжність між абсолютними значеннями максимальних величин $\tau_{z\theta}$ за температурної та термосилової дій складає 69%.

Переміщення в радіальному напрямку u_r за силової та температурної дій змінюють свої знаки з додатних на від'ємні. Відмінність між максимумами u_r за модулем у цих двох станах складає 71%.

Висновки. На основі модифікованого варіаційного принципу Ху – Васіду отримано тривимірну неоднорідну систему диференціальних рівнянь рівноваги в частинних похідних за силової та температурної дій у рамках лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат. Для зведення системи до одновимірної було використано розвинення у подвійні тригонометричні ряди Фур'є, де апроксимація невідомих уздовж твірної та за коловим напрямком анізотропної оболонки проводилася з використанням аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна. Для розв'язання отриманої одновимірної системи диференціальних рівнянь було використано чисельний метод дискретної ортогоналізації.

У просторовій постановці розв'язано задачу визначення параметрів напружено-деформованого стану анізотропної циліндричної композитної боропластикової оболонки, захищеної з боку температурного поля високої інтенсивності шаром нанокерамічного функціонально-градієнтного матеріалу, утвореного армуванням керамічної матриці вуглецевими нанотрубками, орієнтованими згідно з наперед заданим напрямком. Досліджено залежність напружень і переміщень циліндричної оболонкової конструкції за термічного та термосилового впливів на неї від зміни кута повороту головних напрямів пружності матеріалу як боропластику, так і вуглецевого нанокерамічного ФГМ.

1. Аврамов К. В., Чернобривко М. В., Успенський Б. В. Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок // *Космічна наука і технологія*. – 2019. – **25**, № 2. – С. 23–37.
– <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.023>.
2. Баженов В. А., Семенюк М. П., Трач В. М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – Київ: Каравела, 2010. – 352 с.
3. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачі теорії упругості неоднородних тел. – Київ: Наук. думка, 1991. – 216 с.
4. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Київ: Академперіодика, 2006. – 472 с.
5. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Коротких Ю. А. Свободные осесимметричные колебания полого цилиндра конечной длины из функционально-градієнтного материала // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2015. – **58**, № 2. – С. 64–75.
Те саме: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Korotkikh Yu. A. Free axisymmetric vibrations of a hollow cylinder of finite length made of a functionally graded material // *J. Math. Sci.* – 2017. – **223**, No. 1. – P. 72–86.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3339-y>.
6. Новожиллов В. В. Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 374 с.
7. Семенюк М. П., Трач В. М., Подворний А. В. Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки // *Прикл. механіка*. – 2023. – **59**, № 1. – С. 91–102.
Те саме: Semenyuk M. P., Trach V. M., Podvornyi A. V. Stress-strain state of a thick-walled anisotropic cylindrical shell // *Int. Appl. Mech.* – 2023. – **59**, No. 1. – P. 79–89. – <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01201-5>.
8. Трач В. М., Подворний А. В., Хоружий М. М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок. – Київ: Каравела, 2019. – 273 с.
9. Alashti R. A., Khorsand M., Tarahhomi M. H. Three-dimensional asymmetric thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating cylindrical shell // *J. Theor. Appl. Mech.* – 2013. – **51**, No. 1. – P. 143–158.
10. Amada S., Munekata T., Nagase Y., Ichikawa Y., Kirigai A., Zhifei Y. The mechanical structures of bamboos in viewpoint of functionally gradient and composite materials // *J. Compos. Mater.* – 1996. – **30**, No. 7. – P. 800–819.
– <https://doi.org/10.1177/002199839603000703>.
11. Bidgoli M. O., Loghman A., Arefi M. Three-dimensional thermo-elastic analysis of a rotating cylindrical functionally graded shell subjected to mechanical and thermal

- loads based on the FSDT formulation // J. Appl. Mech. Techn. Physics. – 2019. – **60**, No. 5. – P. 899–907. – <https://doi.org/10.1134/S0021894419050134>.
12. Duong V. Q., Tran N. D., Doan T. L. Static investigation of a functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell, double-ended clamped subjected to external pressure loads // J. Sci. Technique. – 2022. – **17**, No. 5. – P. 28–46. – <https://doi.org/10.56651/lqdtu.jst.v17.n05.528>.
 13. Kanagaraj S., Varanda F. R., Zhil'tsova T. V., Oliveira M. S. A., Simoes J. A. O. Mechanical properties of high density polyethylene/carbon nanotube composites // Compos. Sci. Technol. – 2007. – **67**, No. 15–16. – P. 3071–3077. – <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.04.024>.
 14. Lekhnitskii S. G. Theory of elasticity of an anisotropic body. – Moscow: Mir, 1981. – 340 p.
 15. Ma L.-H., Zhang K., Pan X.-D., Zhou W. A comparative study of the elasto-plastic properties for ceramic nanocomposites filled by graphene or graphene oxide nanoplates // Nanotechnology Reviews. – 2022. – **11**, No. 1. – P. 2584–2594. – <https://doi.org/10.1515/ntrev-2022-0150>.
 16. Pandey R., Singh P. Nanocomposite ceramics for energy harvesting // In: Singh D. K., Singh S., Singh P. (eds). Nanomaterials. Advances and Applications. – Springer, 2023. – P. 241–266. – https://doi.org/10.1007/978-981-19-7963-7_9.
 17. Ramezani M., Ripin Z. M. An overview of enhancing the performance of medical implants with nanocomposites // J. Compos. Sci. – 2023. – **7**, No. 5. – Art. No. 199. – 24 p. – <https://doi.org/10.3390/jcs7050199>.
 18. Shen H.-S. Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 280 p. – <https://doi.org/10.1201/9781420092578>.
 19. Shen H.-S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments // Compos. Struct. – 2009. – **91**, No. 1. – P. 9–19. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.04.026>.
 20. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions // Compos. Struct. – 2017. – **182**. – P. 364–379. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.043>.
 21. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford, etc.: Pergamon Press, 1982. – 630 p.

THERMOFORCE DEFORMATION OF NON-THIN ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS PROTECTED BY A FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL

Using the modified Hu – Washizu variational principle, an inhomogeneous three-dimensional system of differential equilibrium equations is obtained for the analysis of stress-strain state of a composite cylindrical anisotropic shell under the force and thermal impacts imposed on the end faces. The anisotropy of the shell material is characterized by one plane of elastic symmetry for each layer. The original three-dimensional system of equilibrium equations is reduced to a one-dimensional system of first-order ordinary differential equations with respect to the radial coordinate using the Bubnov – Galerkin method. The solution to the obtained boundary value problem is carried out by the numerical method of discrete orthogonalization. The results of the calculation of the stress-strain state of an anisotropic cylindrical composite boron-plastic shell protected against the high-intensity temperature field by a layer of nanoceramic functionally graded material are presented.

Key words: *anisotropic cylindrical shell, three-dimensional formulation, thermoforce impact, nanoceramic functionally graded material.*

Національний ун-т водного господарства
і природокористування, Рівне

Одержано
22.06.2023