УДК 539.375

О. Л. Кіпніс[✉]

СТІЙКІСТЬ ОДНОРІДНОЇ НЕСКІНЧЕННОЇ СМУГИ ПРИ СТИСКАННІ ВЗДОВЖ ВНУТРІШНЬОЇ ТРІЩИНИ

З використанням співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено задачу плоскої деформації про стискання однорідної нескінченної смуги вздовж внутрішньої відкритої тріщини. Підхід, який полягає у зведенні крайової задачі для потенціальних гармонічних функцій до інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, одержаних у загальному вигляді для широкого класу високоеластичних матеріалів, потенціал яких має однакові корені характеристичного рівняння, вперше апробовано для обмежених в одному з просторових напрямків областей. У випадку, коли при стисканні смуги з потенціалом гармонічного типу реалізується симетрична форма втрати стійкості, визначено критичні відносні укорочення і проаналізовано їхню залежність від відносної ширини смуги.

Ключові слова: *високоеластичний матеріал, стиск вздовж тріщини, смуга з тріщиною, критичні навантаження.*

Вступ. У випадку, коли стискання тіла відбувається вздовж площин розташування тріщин [7, 9, 20, 21], класичні критерії руйнування Гріффітса – Ірвіна [19, 22] та їхні узагальнення не застосовні, оскільки коефіцієнти інтенсивності напружень в околах вершин тріщин і величини, що характеризують розкриття тріщин, при такій схемі навантаження дорівнюють нулю [13, 15]. Натомість ефективним підходом до дослідження таких некласичних проблем механіки руйнування є застосування апарату тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) [20] та розроблених в її рамках критеріїв руйнування [8].

В межах ТЛТСДТ досліджено широкий клас плоских і просторових осесиметричних задач (див., наприклад, [2, 3, 5, 12, 16, 17]) для необмежених і напівобмежених однорідних тіл, які послаблені відкритими тріщинами і зазнають стиску вздовж них. Визначено критичні значення параметрів навантаження, які відповідають втраті стійкості локальної частини матеріалу поблизу тріщин, що відповідає початку процесу руйнування.

Із застосуванням моделі кусково-однорідного середовища [9], яка використовується для моделювання шаруватих композитних матеріалів (або конструкційних матеріалів з шаром покриття), досліджено також деякі задачі про стискання шаруватих композитів уздовж міжфазних відкритих тріщин [4, 10, 24].

Ефективними для таких досліджень є як числові підходи [10, 24], так і аналітично-числові [6, 12]. Останні полягають у зведенні крайової задачі для гармонічних потенціальних функцій до задачі на власні значення для інтегральних рівнянь з логарифмічною особливістю [12] або інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду [6]. При цьому перевагою аналітико-числових підходів є можливість проводити дослідження в загальній формі для широкого класу матеріалів, а конкретизацію моделі матеріалу виконувати лише на фінальному етапі розв’язання задачі на власні значення.

Нижче в рамках теорії великих (скінченних) деформацій ТЛТСДТ [20] описаний вище аналітично-числовий підхід вперше застосовується до дослідження симетричної задачі про стискання обмеженого (в одному напрямку) тіла, а саме смуги, яка послаблена розташованою на її серединній лінії тріщиною.

[✉] a.l.kipnis@gmail.com

DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.1-2.224-232

1. Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо однорідну нескінченну смугу $-\infty < x_1 < \infty$, $-h \le x_2 \le h$, виготовлену з високоеластичного матеріалу, яка на своїй серединній лінії $x_2 = 0$ містить відкриту ненавантажену тріщину довжини $2a$ (рис. 1). Верхня ($x_2 = h$) та нижня ($x_2 = -h$) грані смуги є вільними від напружень.

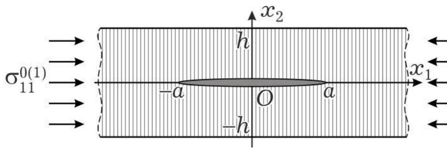

Рис. 1

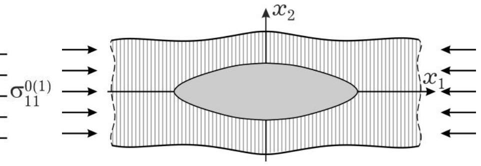

Рис. 2

Нехай на нескінченності смуга стискається вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями σ_{11}^0. У цьому випадку докритичний напружено-деформований стан смуги є статично визначеним, однорідним та описується виразом для переміщень

$$u_1^0 = (\lambda_1 - 1)x_1, \quad \lambda_1 < 1, \tag{1}$$

де λ_1 − коефіцієнт укорочення матеріалу смуги внаслідок дії стискальних зусиль σ_{11}^0 (тут і далі верхнім індексом «0» позначено величини, що відносяться до початкового (докритичного, незбуреного) стану, а збурення цих величин не позначено додатковим індексом).

Відповідно до критерію руйнування, сформульованого в [8], початок процесу руйнування матеріалу смуги при її стисканні вздовж тріщин пов'язаний із втратою стійкості стану рівноваги матеріалу в локальній області поблизу тріщини (локальна втрата стійкості). При цьому теоретичній межі міцності та значенню граничного укорочення відповідає величина критичного стискального навантаження та критичного значення укорочення, що обчислюються за допомогою зазначеного критерію. В цій роботі розглянуто випадок симетричної форми втрати стійкості [9] (рис. 2).

З урахуванням умов симетрії крайові умови задачі записують так:

$$\begin{aligned}
&t_{22} = 0, \quad t_{21} = 0 && \text{при} \quad x_2 = h, \quad 0 \le |x_1| < \infty, \\
&t_{21} = 0 && \text{при} \quad x_2 = 0, \quad 0 \le |x_1| < \infty, \\
&t_{22} = 0 && \text{при} \quad x_2 = 0, \quad |x_1| \le a, \\
&u_2 = 0 && \text{при} \quad x_2 = 0, \quad |x_1| > a.
\end{aligned} \tag{2}$$

Тут $t_{k\ell}$, $k, \ell = 1, 2$, є збуреннями компонент несиметричного тензора напружень Піоли − Кірхгофа $\tilde{t}$, $\mathbf{u}$ − вектор збурень переміщень.

Зведемо задачу з крайовими умовами (2) до крайової задачі для гармонічних потенціальних функцій.

Умова однорідності докритичного напружено-деформованого стану (1) є необхідною умовою застосовності співвідношень ТЛТСДТ [20, 21]. Дослідження здійснюємо в рамках теорії великих (скінченних) докритичних деформацій ТЛТСДТ.

З використанням загального підходу до лінеаризації нелінійних співвідношень отримано [20, 21] лінеаризовані співвідношення пружності для стисливих матеріалів у випадку плоскої задачі:

$$t_{k\ell} = \omega_{k\ell mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}, \quad k, \ell, n, m = 1, 2,$$

де величини $\omega_{k\ell mn} = \omega_{k\ell mn}(\lambda_1)$ є компонентами тензора четвертого рангу $\tilde{\omega}$ і характеризують вибрану модель матеріалу (у випадку високоеластичних матеріалів це відповідний пружний потенціал). Аналогічні подання отримано для випадку нестисливих тіл (відповідні компоненти тензорів $\tilde{\omega}$ треба замінити на компоненти тензора четвертого рангу $\tilde{æ}$).

У [20, 21] побудовано подання загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції. Вигляд цих подань залежить від співвідношення коренів характеристичного рівняння для вибраної моделі матеріалу. В цій роботі досліджено випадок, коли характеристичне рівняння має однакові корені, які для стисливих тіл визначаються так:

$$n_{1,2} = n = c \pm \sqrt{c^2 - \frac{\omega_{2222}\omega_{2112}}{\omega_{1111}\omega_{1221}}}\,,$$

$$2c = \frac{\omega_{2222}}{\omega_{1221}} + \frac{\omega_{2112}}{\omega_{1111}} - \frac{(\omega_{1122} + \omega_{1212})^2}{\omega_{1111}\omega_{1221}}\,.$$

Уведемо гармонічні потенціальні функції F, Φ, φ, пов'язані співвідношеннями

$$\mathrm{F} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}, \quad \Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \quad \varphi = -(\varphi_1 + \varphi_2), \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\, x_2\,.$$

Тоді маємо такі подання збурень напружень і переміщень:

$$u_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - z_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}\,,$$

$$u_2 = p_1 \mathrm{F} + p_2 \Phi + p_2 z_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1}\,,$$

$$t_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[k_1 \mathrm{F} + k_2 \Phi + k_2 z_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1} \right],$$

$$t_{22} = k_4 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1} + k_5 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + k_5 z_1 \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial {z_1}^2}, \quad i = 1,2\,, \tag{3}$$

коефіцієнти в яких є функціями компонентів тензора $\tilde{\omega}$ (для стисливих тіл)

$$k_{1,2,4,5} = k_{1,2,4,5}(\omega_{k\ell mn}), \quad p_{1,2} = p_{1,2}(\omega_{k\ell mn}), \quad k, \ell, m, n = 1,2\,,$$

або функціями компонентів тензора $\tilde{æ}$ (для нестисливих тіл)

$$k_{1,2,4,5} = k_{1,2,4,5}(æ_{k\ell mn}), \quad p_{1,2} = p_{1,2}(æ_{k\ell mn}), \quad k, \ell, m, n = 1,2\,.$$

Використовуючи (3), отримуємо подання для крайових умов задачі (2) в термінах гармонічних потенціальних функцій у такому вигляді:

$$k_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + k_2 h_1 \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_1 \partial z_1} = 0\,,$$

$$k_4 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1} + k_5 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + k_5 h_1 \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial {z_1}^2} = 0 \quad \text{при} \quad z_1 = h_1, \quad 0 \le |x_1| < \infty\,,$$

$$k_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при} \quad z_1 = 0, \quad 0 \le |x_1| < \infty\,,$$

$$k_4 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1} + k_5 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = 0 \quad \text{при} \quad z_1 = 0, \quad |x_1| \le a\,,$$

$$p_1F + p_2\Phi = 0 \qquad \text{при} \qquad z_1 = 0, \quad |x_1| > a, \quad h_1 = n^{-1/2}h. \quad (4)$$

2. Інтегральні рівняння задачі. Враховуючи симетрію конфігурації відносно осі Ox_2, подамо невідомі потенціальні функції F, Φ, φ у вигляді косинус-розвинень в ряди Фур'є за координатою x_1

$$\mathrm{F}(x_1, z_1) = \int_0^\infty \Big[A_1(\lambda)\cosh\lambda(-h_1 + z_1) +$$

$$+A_2(\lambda)\sinh\lambda(-h_1 + z_1)\Big]\frac{\cos\lambda x_1}{\sinh\lambda h_1}d\lambda,$$

$$\Phi(x_1, z_1) = \int_0^\infty \Big[B_1(\lambda)\cosh\lambda(-h_1 + z_1) +$$

$$+B_2(\lambda)\sinh\lambda(-h_1 + z_1)\Big]\frac{\cos\lambda x_1}{\sinh\lambda h_1}d\lambda,$$

$$\varphi(x_1, z_1) = \int_0^\infty \Big[B_2(\lambda)\cosh\lambda(-h_1 + z_1) +$$

$$+B_1(\lambda)\sinh\lambda(-h_1 + z_1)\Big]\frac{\cos\lambda x_1}{\lambda\sinh\lambda h_1}d\lambda. \qquad (5)$$

Подання (5) відповідають парності функцій $u_2(x_1, z_1)$ і непарності функцій $u_1(x_1, z_1)$ за координатою x_1, тому далі розглядаємо лише значення $x_1 \geq 0$.

Задовольняючи перші три умови (4), отримуємо систему трьох лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих функцій $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$, $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$:

$$k_1A_1 + k_2\mu A_2 + k_2B_1 = 0,$$

$$k_5\mu A_1 + k_4A_2 + k_5B_2 = 0,$$

$$k_1\coth\mu\cdot A_1 - k_1A_2 + k_2\coth\mu\cdot B_1 - k_2B_2 = 0,$$

$$\mu = \lambda h_1.$$

На основі цієї системи визначимо три із вказаних функцій через $A_2(\lambda)$:

$$B_1 = -\frac{k_1}{k_2}A_1 - \mu A_2, \quad B_2 = -\mu A_1 - \frac{k_4}{k_5}A_2, \quad A_1 = \left(\coth\mu - \frac{k}{\mu}\right)A_2,$$

$$k = \frac{k_4k_2 - k_1k_5}{k_2k_5}.$$

Останні дві умови (4) після перетворень приводять до такої системи парних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty \delta(\mu)A_2\lambda\cos\lambda x_1 d\lambda = 0 \qquad \text{при} \qquad |x_1| \leq a, \qquad (6)$$

$$\int_0^\infty \delta_1(\mu)A_2\cos\lambda x_1 d\lambda = 0 \qquad \text{при} \qquad |x_1| > a, \qquad (7)$$

$$\delta_1(\mu) = \left(p_1 - \frac{k_1}{k_2}p_2\right)\left(1 + \frac{k}{\mu}\coth\mu - \coth^2\mu\right),$$

$$\delta(\mu) = \mu(1 - \coth^2 \mu) + \frac{k^2}{\mu}.$$

Уведемо нову невідому функцію $\varphi(t)$, яка є неперервною разом зі своєю похідною на відрізку $[0, a]$, поклавши в (7) [14]

$$\delta_1(\mu) A_2 = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^a \varphi(t)(\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt. \tag{8}$$

Подання (8) дає змогу задовольнити крайову умову поза тріщиною (інтегральне рівняння (7)), а інтегральне рівняння (6) звести до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^1 \left[\int_0^\infty \frac{\delta(n^{-1/2}\beta\lambda)}{\delta_1(n^{-1/2}\beta\lambda)} \frac{(\cos \lambda\eta - \cos \lambda)\cos \lambda\xi}{\lambda} d\lambda \right] f(\eta)\, d\eta = 0, \tag{9}$$

$$\beta = h/a, \quad 0 \le \xi < 1, \quad 0 \le \eta \le 1,$$

для безрозмірних змінних $\xi \equiv x_1 / a$, $\eta \equiv t / a$ відносно невідомої безрозмірної функції $f(\xi) \equiv a\varphi(a\xi)$.

Невласний інтеграл, що є ядром інтегрального рівняння (9), є збіжним, а саме ядро – неперервним для всіх допустимих значень параметрів і змінних, коли виконується умова

$$\delta_1(x) \ne 0, \quad x > 0. \tag{10}$$

Можна показати, що умова (10) виконується для всіх допустимих значень параметрів і змінних, коли

$$\lambda_1^{\mathrm{cr}} < \lambda_1 < 1.$$

Значення λ_1^{cr} є критичним значенням, яке відповідає приповерхневій втраті стійкості однорідної півплощини з вільною межею без тріщини [21]. Воно визначається лише виглядом пружного потенціалу. В задачі про стискання однорідної півплощини вздовж приповерхневої тріщини [12] та кусково-однорідної півплощини вздовж міжфазної приповерхневої тріщини [6] верхня оцінка для критичного значення параметра λ_1 також дорівнює λ_1^{cr}.

Таким чином, вихідну проблему зведено до задачі (9) на власні значення відносно параметра укорочування $\lambda_1 < 1$ (значення $\lambda_1 = 1$ відповідає незбуреному стану). Параметр λ_1 характеризує докритичний стан та нелінійно входить до ядер інтегральних рівнянь (9), (10).

Інтегральне рівняння (9) отримано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл у випадку, коли матеріал смуги є високоеластичним, для якого реалізується випадок однакових коренів характеристичного рівняння.

3. Критичні параметри навантаження в задачі про стискання смуги вздовж внутрішньої тріщини (симетрична форма). Аналіз результатів. Наведемо результати дослідження задачі на власні значення (9) для конкретних моделей матеріалу та порівняємо їх із результатами розв'язання задачі про стискання однорідної півплощини вздовж приповерхневої тріщини [12]. Розглянемо випадки, коли матеріал смуги описується гармонічним потенціалом (стисливе тіло) [23] та потенціалом Бартенєва – Хазановича (нестисливе тіло) [1].

Потенціал гармонічного типу [23] характеризується двома сталими: μ, яка є аналогом коефіцієнта Ляме (модуля жорсткості) в лінійній теорії пружності, та ν, яка є аналогом коефіцієнта Пуассона. З огляду на малість збурень напружень і переміщень у задачі, що досліджується, надалі називатимемо сталу ν коефіцієнтом Пуассона, маючи на увазі величину, що характеризує здатність матеріалу до стисливості.

Для потенціалу гармонічного типу у випадку плоскої задачі справджуються такі співвідношення:

$$n = 1, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{\nu}{1-\nu}(\lambda_1 - 1), \quad \sigma_{11}^0 = 2\mu \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\lambda_1^{cr} = 0.5, \quad \varepsilon_1^{cr} = 1 - \lambda_1^{cr} = 0.5,$$

($\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ визначає [9, 20, 21] відносне критичне укорочення матеріалу вздовж осі Ox_1).

Потенціал Бартенєва – Хазановича [1] характеризується однією сталою μ, яка визначає жорсткість матеріалу. Для потенціалу Бартенєва – Хазановича у випадку плоскої задачі справедливі такі співвідношення:

$$n = (\lambda_1)^2, \quad \lambda_2 = (\lambda_1)^{-1}, \quad \sigma_{11}^0 = 2\mu(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1)^{-2},$$

$$\lambda_1^{cr} = 0,577, \quad \varepsilon_1^{cr} = 1 - \lambda_1^{cr} = 0.423.$$

Числове дослідження задачі на власні значення (9) реалізовано з використанням методу Бубнова – Гальоркіна [11].

На графіках рис. 3, рис. 4 зображено залежність значення критичного відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ від значення відносної ширини смуги $\beta = h/a$ для випадку, коли матеріал смуги описується потенціалом гармонічного типу (рис. 3) та потенціалом Бартенєва – Хазановича (рис. 4). Горизонтальні прямі $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{cr}$ на цих рисунках відповідають критичним значенням для приповерхневої нестійкості півплощин, виготовлених з відповідних матеріалів.

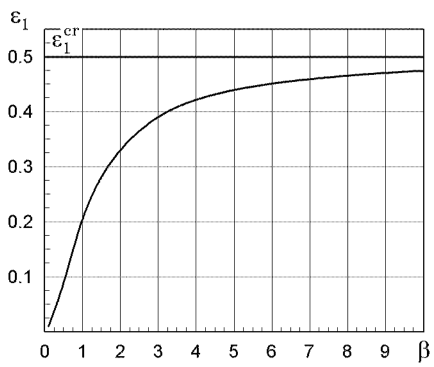

Рис. 3

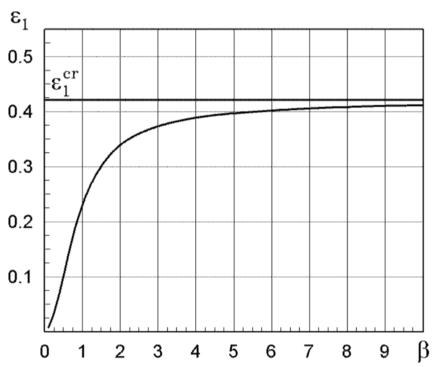

Рис. 4

Аналогічно до задачі про стискання однорідної півплощини вздовж приповерхневої тріщини [12] та кусково-однорідної півплощини вздовж міжфазної приповерхневої тріщини [6] (у випадку, коли матеріал основи є жорсткішим, ніж матеріал покриття) для потенціалу гармонічного типу, в задачі, що досліджується, значення параметра критичного відносного укорочення ε_1 не залежить від значення коефіцієнта Пуассона матеріалу тіла.

Криві на рис. 3, рис. 4 близькі до аналогічних кривих, отриманих при дослідженні такого класу задач у [12] та [6] (у випадку, коли жорсткість складових матеріалів тіла є однаковою). Незважаючи на це, не можна стверджувати, що розв'язки задач для смуги і півплощини є однаковими, оскільки, наприклад, вигляд подання збурень напружень в задачі для півплощини унеможливлює їхню рівність нулю на лінії $x_2 = -h$ (рис. 5).

З огляду на близькість результатів і на те, що структура ключових рівнянь задачі для смуги є простішою за аналогічну, наприклад, для півплощини, перспективним виглядає використання такого наближеного підходу для визначення критичних значень параметрів навантаження при стисканні тіл уздовж тріщин (або інших дефектів): замість дослідження задачі про стискання тіла (можливо, складної форми) вздовж внутрішньої тріщини, досліджувати задачу про стискання нескінченної смуги, одержаної «вирізанням» частини матеріалу тіла навколо тріщини таким чином, щоб тріщина розташовувалась на серединній лінії смуги (див, наприклад, рис. 3). При цьому, якщо «вирізана» смуга є достатньо широкою, то затухання збурень напружень при віддаленні від тріщини приводить до того, що формулювання умови на лінії розрізу у вигляді рівності нулю цих збурень не приводить до суттєвого відхилення в результатах. Цей підхід можна розглядати як розвинення балочного наближення [7, 18], яке досить широко використовується при вивченні проблем подібного класу.

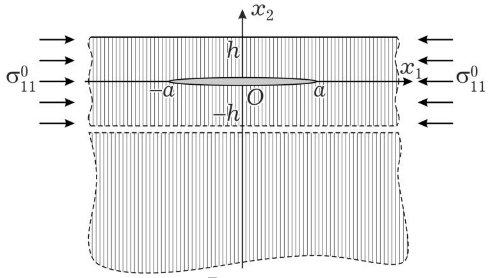

Рис. 5

Висновки. В рамках теорії великих (скінченних) деформацій ТЛТСДТ досліджено задачу плоскої деформації про стискання однорідної смуги вздовж тріщини, розташованої на її серединній лінії (розглянуто випадок симетричної форми втрати стійкості). Матеріал смуги вважається таким високоеластичним матеріалом, для характеристичного рівняння якого виконується умова рівності коренів. З використанням представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції вихідну крайову задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду.

У випадку, коли при стисканні смуги, виконаної з матеріалу з потенціалом гармонічного типу та з потенціалом Бартенєва – Хазановича, реалізується симетрична форма втрати стійкості, отримано значення критичного відносного укорочення, які відповідають втраті стійкості матеріалу в локальній області біля тріщини як початковому етапу руйнування.

З огляду на близькість критичних значень параметра навантаження, які одержані в роботі, та аналогічних значень, одержаних при дослідженні задачі про стискання півплощини вздовж приповерхневої тріщини, можна стверджувати, що в останній реалізується така форма втрати стійкості, яка не приводить до контакту берегів тріщини.

1. *Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н.* О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – **2**, № 1. – С. 20–28.
2. *Богданов В. Л.* Вплив початкових напружень на напружений стан композита з періодичною системою паралельних співвісних тріщин нормального відриву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 3. – С. 99–110.
   Те саме: *Bogdanov V. L.* Influence of initial stresses on the stressed state of a composite with a periodic system of parallel coaxial normal tensile cracks // J. Math. Sci. – 2012. – **186**, No. 1. – P. 1–13.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-012-0969-y.
3. *Богданов В. Л.* Про кругову тріщину зсуву в напівнескінченному композиті з початковими напруженнями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 3. – С. 27–34.
   Те саме: *Bogdanov V. L.* On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses // Mater. Sci. – 2007. – **43**, No. 3. – P. 321–330.
   – https://doi.org/10.1007/s11003-007-0037-9.

4. *Богданов В. Л., Кипнис А. Л.* К исследованию разрушения полуограниченного тела при сжатии вдоль межфазной приповерхностной трещины // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 2. – С. 91–99.
   Те саме: *Bogdanov V. L, Kipnis A. L.* Investigation of the fracture of a semibounded body compressed along a near-surface interface crack // J. Math. Sci. – 2021. – **253**, No. 1. – P. 99–107.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-021-05214-8.
5. *Богданов В. Л., Назаренко В. М.* К исследованию разрушения сжатием полуограниченного упругого материала с потенциалом гармоничного типа // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 10. – С. 29–34.
   Те саме: *Bogdanov V. L., Nazarenko V. M.* Study of the compressive failure of a semi-infinite elastic material with a harmonic potential // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, No. 10. – P. 760–765. – https://doi.org/10.1007/BF00847135.
6. *Богданов В. Л., Назаренко В. М., Кіпніс О. Л.* Стиск напівобмеженого тіла з тонким шаром покриття вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. Ч. I // Прикл. механіка. – 2024. – **60**, № 5. – С. 3–17.
   Те саме: *Bogdanov V. L., Nazarenko V. M., Kipnis O. L.* Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part I // Int. Appl. Mech. – 2024. – **60**, No. 5. – P. 511–524.
   – https://doi.org/10.1007/s10778-025-01303-2
7. *Гузь А. Н.* О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 1. – С. 5–88.
   Те саме: *Guz A. N.* Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No. 1. – P. 1–57. – https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y.
8. *Гузь А. Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача // Докл. АН СССР. – 1981. – **259**, № 6. – С. 1315–1318.
9. *Гузь А. Н.* Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2-х т. – Киев: «Литера», 2008. – Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.; Т. 2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
10. *Гузь И. А., Коханенко Ю. В.* Устойчивость слоистого композитного материала при сжатии вдоль микротрещины // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 9. – С. 30–37.
   Те саме: *Guz' I. A., Kokhanenko Yu. V.* Stability of laminated composite material in compression along a microcrack // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, No. 9. – P. 702–708. – https://doi.org/10.1007/BF00847367.
11. *Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Москва: Наука, 1965. – 383 с.
12. *Назаренко В. М.* Плоская задала разрушения материалов при сжатии вдоль приповерхностных трещин // Прикл. механика. – 1986. – **22**, № 10. – С. 72–81.
   Те саме: *Nazarenko V. M.* Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **22**, No. 10. – P. 970–978. – https://doi.org/10.1007/BF01273678.
13. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З.* Основы механики разрушения материалов. – Київ: Наук. думка, 1988. – 488 с.
14. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
15. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
16. *Bogdanov V., Guz A., Nazarenko V.* Fracture of materials loaded along cracks: Approach and results // In: *Guz A. N., Altenbach H., Bogdanov V., Nazarenko V. M.* (eds.) Advances in Mechanics. – Ser. Advanced Structured Materials. – Vol. 191. – Cham: Springer, 2023. – P. 51–89.
   – https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_4.
17. *Bogdanov V. L.* On one approach in fracture mechanics of composites with parallel cracks under the action of initial (residual) stresses // Mech. Comp. Mater. – 2023. – **59**, No. 2. – P. 239–262. – https://doi.org/10.1007/s11029-023-10094-x.
18. *Bolotin V. V.* Stability Problems in Fracture Mechanics. – New York: Wiley, 1994. – 183 p.
19. *Griffith A. A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1920. – **221**. – P. 163–198.
   – https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006.
20. *Guz A. N.* Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1999. – xvi+557 p.

21. *Guz A. N., Bogdanov V. L., Nazarenko V. M.* Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks // In: *Guz A. N., Bogdanov V. L., Nazarenko V. M.* Fracture of materials under compression along cracks. – Ser. Advanced Structured Materials. – Vol. 138. – Cham: Springer, 2020. – P. 149–248. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3.
22. *Irwin G. R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. – 1957. – **24**, No. 3. – P. 361–364. – https://doi.org/10.1115/1.4011547.
23. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure Appl. Math. – 1960. – **13**, No. 2. – P. 239–296. – https://doi.org/10.1002/cpa.3160130206.
24. *Winiarski B., Guz I. A.* The effect of the interaction of cracks in orthotropic layered materials under compressive loading // Phil. Trans. Royal Soc. A. – 2008. – **366**, No. 1871. – P. 1841–1847. – https://doi.org/10.1098/rsta.2007.2191.

STABILITY OF A HOMOGENEOUS INFINITE STRIP UNDER COMPRESSION ALONG AN INTERNAL CRACK

Using the relations of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable solids, the plane deformation problem of compression of a homogeneous infinite strip along an internal open crack is studied. The approach, which consists in reducing the boundary value problem for harmonic potential functions to Fredholm integral equations of the first kind, obtained in a general form for a wide class of highly elastic materials, the potential of which has equal roots of the characteristic equation, was tested for the first time for domains limited in one of the spatial directions. In the case where, when compressing a strip with a harmonic potential, a symmetric form of stability loss is realized, the critical relative contractions of the problem are determined and their dependence on the relative width of the strip is analyzed.

Key words**:** *highly elastic material, compression along the crack, strip with crack, critical loads***.**

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Одержано
30.02.2024