

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Розглянуто вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова довільного порядку з двома групами просторових змінних виродження, які до того ж мають виродження на початковій гіперплощині, і коефіцієнтами, залежними від усіх змінних. Для таких рівнянь побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші. Отримано оцінки цього розв'язку та його похідних.

Ключові слова: параболічне рівняння довільного порядку, вироджене параболічне рівняння типу Колмогорова, виродження на початковій гіперплощині, фундаментальний розв'язок задачі Коші, метод Леві.

Вступ. Рівняння, які вивчаються у роботі, є певним узагальненням вироджених параболічних рівнянь другого порядку типу рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [32]. Таке рівняння і його різноманітні узагальнення зустрічаються при побудові і дослідженні моделей, які виникають у деяких задачах теорії ймовірностей, математичного моделювання опціонів, у теорії броунівського руху, теорії конвективної дифузії, теорії бінарних електролітів, під час моделювання процесів дифузії з інерцією та розсіювання електронів, у віковому наближенні теорії сповільнених електронів, у біології, економіці та інших галузях науки [22, 24–31, 33–35]. Клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку з коефіцієнтами, незалежними від просторових змінних (підклас E_{21}^0 класу E_{21} , за термінологією з монографії [26]), означений С. Д. Ейдельманом і Г. П. Малицькою в працях [20, 23]. Дослідженню рівнянь з цього класу присвячені праці С. Д. Ейдельмана, Г. П. Малицької, Л. М. Тичинської, С. Д. Івасишена, Л. М. Андросової, І. П. Мединського і О. Г. Возняк [1, 2, 6–9, 17–19, 21]. Для таких рівнянь побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), досліджено його властивості і за їхньою допомогою доведено теореми про існування та єдиність розв'язків задачі Коші та встановлено деякі якісні властивості розв'язків. Якщо коефіцієнти рівняння залежать від усіх змінних, тобто рівняння належить до класу E_{21} , то задача побудови і дослідження ФРЗК істотно ускладнюється. Крім традиційних, виникають серйозні труднощі, які пов'язані з виродженістю рівнянь. С. Д. Івасишен, модифікувавши відповідним чином поняття B -гельдеровості S. Polidoro [35], для рівнянь з класу E_{21} вивів умови, за яких побудував некласичний, так званий L -ФРЗК, отримав відповідні оцінки ФРЗК та його похідних і за їхньою допомогою довів теореми про коректну розв'язність задачі Коші. Ці результати вперше опубліковано в монографії [26].

У працях С. Д. Івасишена та І. П. Мединського [11–15, 31] для параболічних рівнянь типу Колмогорова другого порядку з обмеженими коефіцієнтами розроблено нову модифікацію методу Леві та застосовано її до побудови класичного ФРЗК Z , отримання точних оцінок функції Z , її похідних, а також у цитованих працях наведено теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші [10, 16]. Аналогічні результати одержано також для рівнянь, які додатково мають виродження на початковій гіперплощині [3–5, 36]. У праці [21] для рівнянь з класу E_{21}

✉ i.p.medynsky@gmail.com

побудовано класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші, отримано оцінки цього розв'язку та його похідних. Тому природним є бажання одержати аналогічні результати для рівнянь з цього класу, які до того ж мають виродження на початковій гіперплощині. Цьому і присвячена стаття.

1. Позначення, припущення і умови на коефіцієнти. Нехай b, n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; $\mathbb{N}_j := \{1, \dots, j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$, $j \in \mathbb{N}$; $m_j = j + 1/(2b) - 1$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де компоненти $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Відповідно мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ запишуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (k_{j1}, \dots, k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо використовувати позначення $M := m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$; $M_k := m_1 |k_1| + m_2 |k_2| + m_3 |k_3|$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, де $|k_j| := k_{j1} + \dots + k_{jn_j}$. Крім наведених вище, користуватимемось ще такими позначеннями: $\Pi_H := \{(t, x) \mid t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; α і β – неперервні на відрізку $[0, T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0, T]$, $\alpha(0) \cdot \beta(0) = 0$ і β – монотонно неспадна функція;

$$A(t, \tau) := \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}, \quad B(t, \tau) := \int_{\tau}^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta, \quad 0 < \tau < t \leq T,$$

$$\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot), \quad \Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot), \quad s \in \mathbb{N}_3,$$

$$z^{(0)} := x, \quad z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3), \quad z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3), \quad z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3),$$

$$x^{(1)} := (x_1, z_2, z_3), \quad x^{(2)} := (x_1, x_2, z_3),$$

$$X(t, \tau) := (X_1(t, \tau), X_2(t, \tau), X_3(t, \tau)), \quad X_1(t, \tau) := x_1,$$

$$X_2(t, \tau) := x_2 + B(t, \tau) \hat{x}_1, \quad X_3(t, \tau) := x_3 + B(t, \tau) x'_2 + 2^{-1} (B(t, \tau))^2 x'_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\hat{x}_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_2}), \quad x'_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_3}), \quad x'_2 := (x_{21}, \dots, x_{2n_3}),$$

$$\Xi^1(t) := (\xi_1, X_2(t), X_3(t)), \quad \Xi^2(t) := (\xi_1, \xi_2, X_3(t)),$$

$$Z^{(s)}(t, \tau) := X(t, \tau) \Big|_{x_s = z_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3, \quad Z^{(0)}(t, \tau) := X(t, \tau).$$

Аналогічно будуємо параметричні точки $Y(t, \tau)$, $\Lambda(t, \tau)$ за відповідними точками y і λ .

У статті часто однаковими літерами (здебільшого літерами C і c) позначатимемо різні сталі, якщо їхні величини нас не цікавлять.

Розглянемо рівняння

$$Lu(t, x) := (S - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (1)$$

в якому

$$S := \alpha(t) \partial_t - \beta(t) \left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} \right),$$

$$A(t, x, \partial_{x_1}) := \beta(t) \left(\sum_{0 < |k_1| \leq 2b} a_{k_1}(t, x) \partial_{x_1}^{k_1} \right) + a_0(t, x),$$

де u – невідома функція.

Будемо припускати, що коефіцієнти a_{k_1} , $|k_1| \leq 2b$, рівняння (1) є комплекснозначними функціями в $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

- (i) a_{k_1} , $|k_1| \leq 2b$, є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t, x)(i\sigma_1)^{k_1} \leq -\delta |\sigma_1|^2;$$

- (ii) a_{k_1} , $|k_1| \leq 2b$, є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists H_1 > 0, \quad \exists \alpha_1 \in (0, 1) \quad \forall \{(t, x), (t, z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]}:$$

$$\left| \Delta_{x_1}^{z_1} a(t, x) \right| \leq H_1 |x_1 - z_1|^{\alpha_1}, \quad (2)$$

$$\exists H_2 > 0, \quad \exists \alpha_2 \in (m_1(m_2)^{-1}, (m_2)^{-1}] \quad \forall \{(t, x), (t, z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \\ \forall h \in [0, T]:$$

$$\left| \Delta_{x_2}^{z_2} a(t, x) \right| \leq H_2 ((B(h, \tau))^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h, \tau) - z_2|^{\alpha_2}); \quad (3)$$

$$\exists H_3 > 0, \quad \exists \alpha_3 \in (m_2(m_3)^{-1}, (m_2)^{-1}] \quad \forall \{(t, x), (t, z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \\ \forall h \in [0, T]:$$

$$\left| \Delta_{x_3}^{z_3} a(t, x) \right| \leq H_3 ((B(h, \tau))^{m_3 \alpha_3} + |X_3(h, \tau) - z_3|^{\alpha_3}); \quad (4)$$

- (iii) $\exists H_4 > 0 \quad \forall \{(t, x), (t, \xi^{(r)}), (t, z^{(s)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad r \in \{\mathbb{N}_3 \mid r < s \in \{2, 3\}\},$

$$\forall h \in [0, T]:$$

$$\left| \Delta_{x_r}^{\xi_r} \Delta_{x_s}^{z_s} a(t, x) \right| \leq H_4 |x_r - \xi_r|^{\alpha_r} ((B(h, \tau))^{m_s \alpha_s} + |X_s(h, \tau) - z_s|^{\alpha_s}), \quad (5)$$

де a – будь-який з коефіцієнтів a_{k_1} , $|k_1| \leq 2b$. У формулі (5) стали

α_1 , α_2 і α_3 такі, як у відповідних формулах (2)–(4).

Використовуватимемо такі оцінювальні функції:

$$E_c^j(t, \tau, z_j) := \exp \left\{ -c(B(t, \tau))^{1-jq} |z_j|^q \right\},$$

$$t > \tau, \quad q := 2b(2b - 1)^{-1}, \quad z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_3; \quad (6)$$

$$E_c^{(1)}(t, \tau, x_1, \xi_1) := E_c^1(t, \tau, X_1(t, \tau) - \xi_1),$$

$$E_c^{(2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) := \prod_{j=1}^2 E_c^j(t, \tau, X_j(t, \tau) - \xi_j),$$

$$E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) := \prod_{j=1}^3 E_c^j(t, \tau, X_j(t, \tau) - \xi_j),$$

$$t > \tau, \quad \{x_j, \xi_j\} \subset \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_3, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (7)$$

$$a_j^{(\chi, C)} := (C\Gamma(\chi)(B(t, \tau))^\chi)^j (\Gamma(j\chi + 1))^{-1},$$

$$t > \tau, \quad C > 0, \quad \chi \in (0, 1), \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad (8)$$

$$E_{c, C}^{(\chi, 1)}(t, \tau, x_1, \xi_1) := E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) F_{c, C}^{(\chi, 1)}(t, \tau, x_1, \xi_1),$$

$$F_{c, C}^{(\chi, 1)}(t, \tau, x_1, \xi_1) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, C)}(t, \tau) E_{c\delta^j}^{(1)}(t, \tau, x_1, \xi_1),$$

$$C > 0, \quad t > \tau, \quad \{x_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \quad (9)$$

$$E_{c, C}^{(\chi, 2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) := E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) F_{c, C}^{(\chi, 2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2),$$

$$F_{c, C}^{(\chi, 2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, C)}(t, \tau) E_{c\delta^j}^{(2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2),$$

$$C > 0, \quad t > \tau, \quad \{x_j, \xi_j\} \subset \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_2; \quad (10)$$

$$E_{c, C}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi) := E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) F_{c, C}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi),$$

$$F_{c, C}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, C)}(t, \tau) E_{c\delta^j}^{(3)}(t, \tau, x, \xi),$$

$$C > 0, \quad t > \tau, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (11)$$

$$E^d(t, \tau) := \exp\{dA(t, \tau)\}, \quad t > \tau, \quad d \in \mathbb{R},$$

$$E_c^{(1), d}(t, \tau, x_1, \xi_1) := E_c^{(1)}(t, \tau, x_1, \xi_1) E^d(t, \tau), \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$E_c^{(2), d}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) := E_c^{(2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) E^d(t, \tau),$$

$$E_c^{(3), d}(t, \tau, x, \xi) := E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) E^d(t, \tau); \quad (11')$$

$$I_c := (B(t, \theta)B(\theta, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t, \theta, x, \lambda) E_c^{(3)}(\theta, \tau, \lambda, \xi) d\lambda,$$

$$c > 0, \quad 0 < \tau < \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (12)$$

$$I_c^{(\chi, C)} := (B(t, \theta)B(\theta, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t, \theta, x, \lambda) E_{c, C}^{(\chi, 3)}(\theta, \tau, \lambda, \xi) d\lambda,$$

$$\chi \in (0, 1], \quad C > 0, \quad c > 0, \quad 0 < \tau < \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (13)$$

$$I_0^{s\ell} := (B(t, \theta)B(\theta, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t, \theta, x, \lambda) E_c^{(3)}(\theta, \tau, \Lambda^{s\ell}(t, \theta), \xi) d\lambda; \quad (14)$$

$$I_1^{sr} := (B(t, \theta))^{-m_1 n_1} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{(1)}(t, \theta, x_1, \lambda_1) E_c^{(3)}(\theta, \tau, \Lambda^{sr}(t, \theta), \xi) d\lambda_1; \quad (15)$$

$$I_2^{sr} := (B(t, \theta))^{-m_1 n_1 - m_2 n_2} \int_{\mathbb{R}^{n_1 + n_2}} E_c^{(2)}(t, \theta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \times \\ \times E_c^{(3)}(\theta, \tau, \Lambda^{sr}(t, \theta), \xi) d\lambda_1 d\lambda_2; \quad (16)$$

$$I_0^{(s\ell)} := (B(t, \theta)B(\theta, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t, \theta, x, \lambda) E_{c,C}^{(\chi,3)}(\theta, \tau, \Lambda^{s\ell}(t, \theta), \xi) d\lambda; \quad (17)$$

$$I_1^{(sr)} := (B(t, \theta))^{-m_1 n_1} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{(1)}(t, \theta, x_1, \lambda_1) E_{c,C}^{(\chi,3)}(\theta, \tau, \Lambda^{sr}(t, \theta), \xi) d\lambda; \quad (18)$$

$$I_2^{(s2)} := (B(t, \theta))^{-m_1 n_1 - m_2 n_2} \int_{\mathbb{R}^{n_1 + n_2}} E_c^{(2)}(t, \theta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \times \\ \times E_{c,C}^{(\chi,3)}(\theta, \tau, \Lambda^{s2}(t, \theta), \xi) d\lambda. \quad (19)$$

У формулі (8) $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера, у формулах (14)–(19)

$$\Lambda^{s0}(t, \tau) := Z^{(s)}(t, \tau), \quad \Lambda^{s1}(t, \tau) := (\lambda_1, Z_2^{(s)}(t, \tau), Z_3^{(s)}(t, \tau)),$$

$$\Lambda^{s2}(t, \tau) := (\lambda_1, \lambda_2, Z_3^{(s)}(t, \tau)), \quad \Lambda^{s3}(t, \tau) := \lambda_1,$$

$$s \in \mathbb{Z}_3, \quad r \in \{2, 3\}, \quad 0 < \tau < \theta < t < T, \quad \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

2. Допоміжні твердження. Властивості оцінювальних функцій (6)–(11) наведемо в такій лемі.

Лема 1. *Правильними є такі твердження:*

$$E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) \leq E_{c_1}^{(3)}(t, \tau, x, \xi), \\ t > \tau, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c > 0, \quad C > 0; \quad (20)$$

$$E_{c,C}^{(\chi,3)}(t, \tau, x, \xi) \leq F_{c,C}^{(\chi,3)}(t, \tau, x, \xi), \\ t > \tau, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c > 0, \quad C > 0, \quad \chi \in (0, 1]; \quad (21)$$

$$E_c^1(t, \theta, x_1 - \lambda_1) E_c^1(\theta, \tau, \lambda_1 - \xi_1) \leq E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1), \\ 0 < \tau < \theta < t \leq T, \quad \{x_1, \lambda_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \quad (22)$$

$$E_c^{(2)}(t, \theta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) E_c^{(2)}(\theta, \tau, \lambda_1, \lambda_2, \xi_1, \xi_2) \leq E_{c_1}^{(2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2), \\ 0 < \tau < \theta < t \leq T, \quad \{x_s, \lambda_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_2, \\ c_1 = c\delta_1, \quad \delta_1 = \max\{1 - 2^{-2/(2b-1)}, 2^{-2/(2b-1)}\}; \quad (23)$$

$$E_c^{(3)}(t, \theta, x, \lambda) E_c^{(3)}(\theta, \tau, \lambda, \xi) \leq E_{c_2}^{(2)}(t, \tau, x, \xi), \\ 0 < \tau < \theta < t \leq T, \quad \{x, \lambda, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \\ c_2 = c\delta_2, \quad \delta_2 = \max\{(1 - 2^{-2/(2b-1)})\delta_1, 2^{-2/(2b-1)}\}; \quad (24)$$

$$E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) \leq E_c^{(1)}(t, \tau, x_1, \xi_1) E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi), \\ c > 0, \quad 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (25)$$

$$|X_s(t, \tau) - \xi_s|^{\alpha_s} E_c^s(t, \tau, X_s(t, \tau) - \xi_s) \leq C(B(t, \tau))^{m_s \alpha_s} E_c^s(t, \tau, X_s(t, \tau) - \xi_s), \\ c > c_0 > 0, \quad 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (26)$$

$$|X_s(t, \tau) - \xi_s|^{\alpha_s} E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) \leq C(B(t, \tau))^{m_s \alpha_s} E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi), \\ c > c_0 > 0, \quad 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3; \quad (27)$$

$$E_c^{(3)}(t, \tau, y^{(s)}, \xi) \leq CE_{c_0}^{(3)}(t, \tau, x, \xi),$$

$$c > c_0 > 0, \quad 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (28)$$

$$E_c^{(3)}(\theta, \tau, Z^{(\ell)}(t, \theta), \xi) \leq CE_{c_0}^{(3)}(t, \tau, x, \xi),$$

$$0 < \tau < t_1 \leq \theta < t \leq T, \quad \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \ell \in \mathbb{N}_3; \quad (29)$$

$$E_c^{(3)}(\theta, \tau, (\lambda_1, Z_2^{(\ell)}(t, \theta), Z_3^{(\ell)}(t, \theta)), \xi) \leq CE_{-c_0}^{(1)}(t, \theta, x_1, \lambda_1)E_{c_1}^{(3)}(t, \theta, x, \xi),$$

$$0 < \tau < t_1 \leq \theta < t \leq T, \quad \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\ell \in \mathbb{N}_3, \quad \{c_0, c_1\} \subset (0, c); \quad (30)$$

$$E_c^{(3)}(\theta, \tau, (\lambda_1, \lambda_2, Z_3^{(\ell)}(t, \theta)), \xi) \leq CE_{c_1}^{(1)}(\theta, \tau, x_1 - \lambda_1)E_c^{(2)}(\theta, \tau, \Lambda_2(\theta, \tau) - \xi_2) \times$$

$$\times E_{-c_1}^{(1)}(t, \theta, x_1 - \lambda_1)E_{-c_2}^{(2)}(t, \theta, X_2(t, \theta) - \lambda_2)E_{c_0}^{(3)}(t, \tau, X_3(t, \tau) - \xi_3),$$

$$0 < \tau < t_1 \leq \theta < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}^{n_j},$$

$$\ell \in \mathbb{N}_2, \quad \{c_0, c_1, c_2\} \subset (0, c). \quad (31)$$

Тут $C > 0$, у формулі (28) $y^{(s)}$ – точка відрізка прямої, що сполучає точки x і $z^{(s)}$, $s \in \mathbb{N}_3$, у формулах (28)–(31) $|x_s - z_s|^{1/m_s} \leq B(t, \tau)/4$, $s \in \mathbb{N}_3$, t_1 таке, що $B(t, t_1) := B(t, \tau)/2$.

Властивості інтегралів (12)–(19) наведемо у наступній лемі.

Лема 2. Правильними є такі твердження:

$$(B(t, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi = C, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (32)$$

$$(B(t, \tau))^{-m_2 n_2 - m_3 n_3} \int_{\mathbb{R}^{n_2 + n_3}} E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi_2 d\xi_3 \leq CE_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1),$$

$$t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{x_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \quad (33)$$

$$(B(t, \tau))^{-m_3 n_3} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi_3 \leq CE_c^{(2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2),$$

$$t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_2; \quad (34)$$

$$(B(t, \tau))^{-m_s n_s} \int_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^s(t, \tau, X_s(t, \tau) - \xi_s) d\xi_s \leq C, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (35)$$

$$(B(t, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_{c,C}^{(\lambda,3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi \leq C, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (36)$$

$$(B(t, \tau))^{-m_2 n_2 - m_3 n_3} \int_{\mathbb{R}^{n_2 + n_3}} E_{c,C}^{(\lambda,3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi_2 d\xi_3 \leq CE_{c,C}^{(\lambda,1)}(t, \tau, x_1, \xi_1),$$

$$t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{x_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \quad (37)$$

$$(B(t, \tau))^{-m_3 n_3} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} E_{c,C}^{(\lambda,3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi_3 \leq CE_{c,C}^{(\lambda,2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2),$$

$$t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_2; \quad (38)$$

$$I_c \leq C_1 (B(t, \tau))^{-M} E_{c_1}^{(3)}(t, \tau, x, \xi), \quad 0 < \tau < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \\ c_1 = c(1 - \varepsilon)\delta_2, \quad \varepsilon > 0, \quad C_1 = 2^n \varepsilon^{-n} C; \quad (39)$$

$$I_c^{(\chi, C)} \leq C_1 (B(t, \tau))^{-M} E_{c_1, C}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi), \quad 0 < \tau \leq \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \\ c_1 = c(1 - \varepsilon)\delta_2, \quad C_1 = 2^n \varepsilon^{-n} C; \quad (40)$$

$$I_0^{s1} \leq C E_{c_0}^{(3)}(t, \tau, x, \xi), \quad 0 < \tau \leq \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{s, \ell\} \subset \mathbb{Z}_3, \\ \text{причому } \theta \in (\tau, t) \text{ для } \ell = 3; \quad (41)$$

$$I_1^{s1} \leq C E_{c_0}^{(3)}(t, \tau, x, \xi), \quad 0 < \tau < t_1 \leq \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{Z}_3; \quad (42)$$

$$I_2^{s2} \leq C E_{c_0}^{(3)}(t, \tau, x, \xi), \quad 0 < \tau < t_1 \leq \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{Z}_3; \quad (43)$$

$$I_c^{(\chi, C)} \leq C_1 (B(t, \tau))^{-M} E_{c_1, C}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi), \quad 0 < \tau \leq \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \\ c_1 = c(1 - \varepsilon)\delta_2, \quad \varepsilon > 0, \quad C_1 = 2^n \varepsilon^{-n} C; \quad (44)$$

$$I_0^{(s1)} \leq C E_{c_0}^{(3)}(t, \tau, x, \xi), \quad 0 < \tau \leq \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{s, \ell\} \subset \mathbb{Z}_3, \\ \text{причому } \theta \in (\tau, t) \text{ для } \ell = 3; \quad (45)$$

$$I_1^{(s1)} \leq C E_{c_0, C}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi), \quad 0 < \tau < t_1 \leq \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \\ s \in \mathbb{Z}_3, \quad \chi \in (0, 1); \quad (46)$$

$$I_2^{(s2)} \leq C E_{c_0, C}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi), \quad 0 < \tau < t_1 \leq \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \\ s \in \mathbb{Z}_3, \quad \chi \in (0, 1). \quad (47)$$

У нерівностях (39), (40) стала δ_2 така, як в оцінці (24), а стала C – з рівності (25).

При застосуванні методу Леві для побудови ФРЗК виникають інтегральні рівняння другого роду вольтеррівського типу вигляду

$$u(t, x) = f(t, x) + \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \tau, \xi) u(\tau, \xi) d\xi, \quad \{t, x\} \subset \Pi_{[t_0, T]}, \quad (48)$$

ядром яких є неперервна функція

$$K : P_{[t_0, T]}^0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_{[t_0, T]}^0 := \{(t, x; \tau, \xi) \in (\Pi_{[t_0, T]} \times \Pi_{[t_0, T]}) \mid B(t, \tau) > 0\}. \quad (49)$$

Відомо [26, с. 33], що за відповідних умов стосовно ядра K існує єдиний розв'язок рівняння (48) для довільної прийнятної функції f , який визначається формулою

$$u(t, x) = f(t, x) + \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} R(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad \{t, x\} \subset \Pi_{[t_0, T]}. \quad (50)$$

Тут

$$R(t, x; \tau, \xi) := \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0, \quad (51)$$

$K_1 := K$, а K_m , $m > 1$, – повторні ядра, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$K_m(t, x; \tau, \xi) = \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \theta, y) K_{m-1}(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad \{t, x; \tau, \xi\} \in P_{[t_0, T]}^0.$$

При використанні методики побудови ФРЗК, подібної до методики з праць [9, 11], виникають інтегральні рівняння типу (50) з різними ядрами. На першому етапі застосуємо лему, аналогічну до леми 1.9 з [26, с. 36].

Лема 3. *Якщо ядро (49) є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \leq C_1 \beta(t) (B(t, \tau))^{-M+\chi-1} E_{c_1}^{(3), d_1}(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0,$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$ і $\chi \in (0, 1)$, то існує резольвента (51), яка є неперервною функцією і для якої виконується оцінка

$$|R(t, x; \tau, \xi)| \leq C_2 \beta(t) (B(t, \tau))^{-M+\chi-1} E_{c_2, \tilde{C}_2}^{(\chi, 3), d_2}(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0,$$

Тут $C_2 > 0$, $\tilde{C}_2 > 0$ і $c_2 \in (0, c_1)$ – деякі сталі.

Оскільки на наступних етапах оцінювальна функція для ядра K відповідного рівняння має вигляд суми ряду, то використовуватимемо таку лему.

Лема 4. *Якщо ядро (49) є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \leq C_3 \beta(t) (B(t, \tau))^{-M+\chi-1} E_{c_3, \tilde{C}_3}^{(\chi, 3), d_3}(t, \tau, x, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0,$$

з деякими сталими $C_3 > 0$, $\tilde{C}_3 > 0$, $c_3 > 0$ і $\chi \in (0, 1)$, то існує резольвента (51), яка є неперервною функцією і для якої виконується оцінка

$$|R(t, x; \tau, \xi)| \leq C_4 \beta(t) (B(t, \tau))^{-M+\chi-1} E_{c_4, \tilde{C}_4}^{(\chi, 3), d_4}(t, \tau, x, \xi), \quad (52)$$

$$(t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0,$$

в якій $C_4 > 0$, $\tilde{C}_4 > 0$ і $c_4 > 0$ – деякі сталі, причому $\tilde{C}_4 > \tilde{C}_3$, а $c_4 < c_3$.

3. Основні результати. Як і у випадку рівняння другого порядку, процедура побудови ФРЗК складається з трьох етапів. Нехай Z_j – фундаментальний розв'язок задачі Коші на етапі $j \in \mathbb{N}_3$. Результати першого, другого та заключного третього етапів побудови і дослідження ФРЗК для рівняння (1) містяться в теоремах.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови (i)–(iii), в яких x замінено на (x_1, y') , $y' := (y_2, y_3)$. Тоді для цього рівняння існує ФРЗК Z_1 і правильними є такі твердження:*

$$\left| \partial_x^k Z_1(t, x; \tau, \xi; y') \right| \leq C (B(t, \tau))^{-M-M_k} E_{c_1, \tilde{C}_1}^{(m_1 \alpha_1, 3), d_1}(t, \tau, x, \xi);$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_1(t, x; \tau, \xi; y') \right| \leq C (B(t, \tau))^{-M-M_k-m_s \alpha_s^0} |x_s - z_s|^{\alpha_s} \times$$

$$\times \left(E_{c_2, \tilde{C}_2}^{(m_1 \alpha_1, 3), d_1}(t, \tau, x, \xi) + E_{c_2, \tilde{C}_2}^{(m_1 \alpha_1, 3), d_1}(t, \tau, z^{(s)}, \xi) \right), \quad s \in \mathbb{N}_3;$$

$$\left| \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^k Z_1(t, x; \tau, \xi; y') \right| \leq C (B(t, \tau))^{-M-M_k} E_{c_1, \tilde{C}_1}^{(m_1 \alpha_1, 3), d_1}(t, \tau, x, \xi) \times$$

$$\times \left((B(h, \tau))^{m_s \alpha_s} + |Y_s(h, \tau) - z_s|^{\alpha_s} \right), \quad s \in \{2, 3\};$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t, x; \tau, \xi; y') d\xi \right| \leq C(B(t, \tau))^{-M_k + m_1 \alpha_1} E^{d_1}(t, \tau), \quad k \neq 0; \\
& \left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t, x; \tau, \xi; y') d\xi \right| \leq C(B(t, \tau))^{-M_k + m_1 \alpha_1 - m_s \alpha_s^0} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} E^{d_1}(t, \tau), \\
& \qquad \qquad \qquad k \neq 0; \\
& \left| \int_{\mathbb{R}^{n_2 + n_3}} \partial_x^{k'} Z_1(t, x; \tau, \xi; (\xi_2, y_3)) d\xi_2 d\xi_3 \right| \leq C(B(t, \tau))^{-M_{k'} - m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2} \times \\
& \qquad \qquad \qquad \times E_{c_1, \tilde{c}_1}^{(m_1 \alpha_1, 2), d_1}(t, \tau, x_1, \xi_1), \quad k' \neq 0; \\
& \left| \int_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^{k_3} Z_1(t, x; \tau, \xi; (\xi_2, \xi_3)) d\xi_3 \right| \leq C(B(t, \tau))^{-m_1 \alpha_1 - m_2 \alpha_2 - m_3 |k_3| + m_3 \alpha_3} \times \\
& \qquad \qquad \qquad \times E_{c_1, \tilde{c}_1}^{(m_1 \alpha_1, 2), d_1}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2), \quad k_3 \neq 0; \\
& \partial_x^{k'} \int_{\mathbb{R}^{n_2 + n_3}} Z_1(t, x; \tau, \xi; y') d\xi_2 d\xi_3 = 0, \quad k' \neq 0; \\
& \partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_1(t, x; \tau, \xi; y') d\xi_3 = 0, \quad k_3 \neq 0; \\
& \partial_x^{k'} Z_1(t, x; \tau, \xi; y') = (-\partial_\xi)^{k'} Z_1(t, x; \tau, \xi; y'),
\end{aligned}$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^{n_2 + n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\alpha_1^0 \in (0, \alpha_1]$, $\{\alpha_2^0, \alpha_3^0\} \subset (0, 1]$, $\{k, k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $m_1 |k_1| \leq 1$, числа h і α_s такі, як вище.

Теорема 2. Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови (i)–(iii), в яких x замінено на (x_1, x_2, y_3) . Тоді для цього рівняння існує ФРЗК Z_2 і справджуються оцінки

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_x^k Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) \right| \leq C(B(t, \tau))^{-M - M_k} E_{c_2, \tilde{c}_2}^{(m_2 \alpha_2, 3), d_2}(t, \tau, x, \xi); \\
& \left| \Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) \right| \leq C(B(t, \tau))^{-M - M_k - m_s \alpha_s^0} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} \times \\
& \qquad \qquad \qquad \times \left(E_{c_2, \tilde{c}_2}^{(m_2 \alpha_2, 3), d_2}(t, \tau, x, \xi) + E_{c_2, \tilde{c}_2}^{(m_2 \alpha_2, 3), d_2}(t, \tau, z^{(s)}, \xi) \right), \quad s \in \mathbb{N}_3; \\
& \left| \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^k Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) \right| \leq C(B(t, \tau))^{-M - M_k} E_{c_2, \tilde{c}_2}^{(m_2 \alpha_2, 3), d_2}(t, \tau, x, \xi) \times \\
& \qquad \qquad \qquad \times \left((B(h, \tau))^{m_3 \alpha_3} + |Y_3(h, \tau) - z_3|^{\alpha_3} \right), \quad k \neq 0; \\
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) d\xi \right| \leq C(B(t, \tau))^{-M_k + \ell_k} E^{d_2}(t, \tau), \quad k \neq 0; \\
& \left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) d\xi \right| \leq C(B(t, \tau))^{-M_k + \ell_k - m_s \alpha_s^0} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} E^{d_2}(t, \tau), \\
& \qquad \qquad \qquad s \in \mathbb{N}_3, \quad k \neq 0; \\
& \left| \int_{\mathbb{R}^{n_2 + n_3}} \partial_x^{k'} Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) d\xi_2 d\xi_3 \right| \leq C(B(t, \tau))^{-M_{k'} - m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times E_{c_2, \tilde{C}_2}^{(m_2 \alpha_2, 1), d_2}(t, \tau, x_1, \xi_1), \quad k' \neq 0; \\ & \left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) d\xi_2 d\xi_3 \right| \leq C |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} \times \\ & \times (B(t, \tau))^{-m_1 n_1 - M_{k'} + m_2 \alpha_2 - m_s \alpha_s^0} E_{c_2, \tilde{C}_2}^{(m_2 \alpha_2, 1), d_2}(t, \tau, x_1, \xi_1), \quad k' \neq 0, \end{aligned}$$

а також рівності

$$\begin{aligned} & \partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) d\xi_3 = 0, \quad k_3 \neq 0, \\ & \partial_{x_3}^{k_3} Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3), \quad k_3 \neq 0, \end{aligned}$$

в яких $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\alpha_1^0 \in (0, \alpha_1]$, $\alpha_2^0 \in (0, \alpha_2]$, $\alpha_3^0 \in (0, 1]$, $\{k, k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $m_1 |k_1| + |k_2| \leq 1$, числа h і α_s такі, як вище, $\ell_1 := m_1 \alpha_1$, якщо $k_1 \neq 0$, а $k' = 0$, $\ell_2 := m_2 \alpha_2$, якщо $k_1 = 0$, а $k' \neq 0$.

Теорема 3. Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови (i)–(iii). Тоді для цього рівняння існує ФРЗК Z_3 , для якого справджуються оцінки

$$\begin{aligned} & \left| \partial_x^k Z_3(t, x; \tau, \xi) \right| \leq C (B(t, \tau))^{-M - M_k} E_{c_3, \tilde{C}_3}^{(m_3 \alpha_3, 3), d_3}(t, \tau, x, \xi), \\ & \left| SZ_3(t, x; \tau, \xi) \right| \leq C (B(t, \tau))^{-M-1} E_{c_3, \tilde{C}_3}^{(m_3 \alpha_3, 3), d_3}(t, \tau, x, \xi), \end{aligned}$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_1 |k_1| + |k_2| + |k_3| \leq 1$.

4. Про доведення тверджень з п. 2 і п. 3. Твердження (20)–(28) з леми 1 доводяться так само, як і в [26]. Встановимо оцінки (29)–(31). Для цього використовуватимемо нерівності, аналогічні до нерівностей (1.3.9), (1.3.10) з праці [26, с. 25], і припущення, що $\theta \in [t_1, t]$ і $|x_\ell - z_\ell|^{1/m_\ell} \leq B(t, \tau)/4$, $\ell \in \mathbb{N}_3$.

Оскільки

$$\begin{aligned} & Z_1^{(\ell)}(t, \tau) - X_1(t, \tau) = \delta_{1\ell}(z_1 - x_1), \\ & Z_2^{(\ell)}(t, \tau) - X_2(t, \tau) = \delta_{1\ell} B(t, \tau) (\bar{z}_1 - \hat{x}_1) + \delta_{2\ell}(z_2 - x_2), \\ & Z_3^{(\ell)}(t, \tau) - X_3(t, \tau) = 2^{-1} \delta_{1\ell} (B(t, \tau))^2 (z'_1 - x'_1) + \delta_{2\ell} B(t, \tau) (z'_2 - x'_2) + \\ & \quad + \delta_{3\ell} B(t, \tau) (z_3 - x_3), \end{aligned}$$

де $\delta_{k\ell}$ – символ Кронекера, $\{k, \ell\} \subset \mathbb{N}_3$, то

$$\begin{aligned} & (B(\theta, \tau))^{1-q} \left| Z_1^{(\ell)}(t, \theta) - X_1(t, \theta) \right|^q = (B(\theta, \tau))^{1-q} |z_1 - x_1|^q \leq \\ & \leq 2^{-1/(2b-1)} =: p_1, \quad \ell \in \mathbb{N}_3, \\ & (B(\theta, \tau))^{1-2q} \left| Z_2^{(\ell)}(t, \theta) - X_2(t, \theta) \right|^q \leq 2^{q-1} (B(\theta, \tau))^{1-2q} (B(t, \theta))^q \times \\ & \quad \times |\bar{z}_1 - \hat{x}_1|^q + |z_2 - x_2|^q \leq 2^{q-1} (2^{-1/(2b-1)} + 2^{-(2b+1)/(2b-1)}) = \\ & = 1 + 2^{-2b/(2b-1)} =: p_2, \quad \ell \in \mathbb{N}_3, \\ & (B(\theta, \tau))^{1-3q} \left| Z_3^{(\ell)}(t, \theta) - X_3(t, \theta) \right|^q \leq 4^{q-1} (B(\theta, \tau))^{1-3q} (2^{-q} (B(t, \theta))^{2q} |z'_1 - x'_1|^q + \\ & \quad + (B(\theta, \tau))^q |z'_2 - x'_2|^q) + |z_3 - x_3|^q \leq 4^{q-1} (2^{-q} (B(\theta, \tau))^{1-q} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times |z_1 - x_1|^q + (B(\theta, \tau))^{1-2q} |z_2 - x_2|^q + (B(\theta, \tau))^{1-3q} |z_3 - x_3|^q \leq \\
& \leq 2^{-1} + 2^{-(6b-1)/(2b-1)} + 2^{-(4b-1)/(2b-1)} =: p_3, \quad \ell \in \mathbb{N}_3, \\
E_c^{(3)}(\theta, \tau, Z^{(\ell)}(t, \theta), \xi) &= \exp \left\{ -c \left[(B(\theta, \tau))^{1-q} |Z_1^{(\ell)}(t, \theta) - \xi_1|^q + (B(\theta, \tau))^{1-2q} \times \right. \right. \\
& \times |Z_2^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)\widehat{Z}_1^{(\ell)}(t, \theta) - \xi_2|^q + (B(\theta, \tau))^{1-3q} \times \\
& \times \left. \left. |Z_3^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)Z_2^{(\ell)'}(t, \theta) + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2 Z_1^{(\ell)'}(t, \theta) - \xi_3|^q \right] \right\} = \\
& = \exp \left\{ - \left[c(B(\theta, \tau))^{1-q} |(X_1(t, \theta) - \xi_1) + (Z_1^{(\ell)}(t, \theta) - X_1(t, \theta))|^q + \right. \right. \\
& + (B(\theta, \tau))^{1-2q} |(X_2(t, \theta) + B(\theta, \tau)\widehat{X}_1(t, \theta) - \xi_2) + \\
& + B(\theta, \tau)(\widehat{Z}_1^{(\ell)}(t, \theta) - \widehat{X}_1(t, \theta)) + (\widehat{Z}_2^{(\ell)}(t, \theta) - \widehat{X}_2(t, \theta))|^q + \\
& + (B(\theta, \tau))^{1-3q} |(X_3(t, \theta) + B(\theta, \tau)X_2'(t, \theta) + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2 X_1'(t, \theta) - \\
& - \xi_3) + (Z_3^{(\ell)}(t, \theta) - X_3(t, \theta)) + B(\theta, \tau)(Z_2^{(\ell)'}(t, \theta) - X_2'(t, \theta)) + \\
& \left. \left. + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2 (Z_1^{(\ell)'}(t, \theta) - X_1'(t, \theta)) \right|^q \right] \right\} \leq \\
& \leq \exp \left\{ -c \left[(B(\theta, \tau))^{1-q} (2^{1-q} |X_1(t, \theta) - \xi_1|^q - |Z_1^{(\ell)}(t, \theta) - X_1(t, \theta)|^q) + \right. \right. \\
& + (B(\theta, \tau))^{1-2q} (4^{1-q} |X_2(t, \theta) + B(\theta, \tau)\widehat{X}_1(t, \theta) - \xi_2|^q - \\
& - 2^{1-q} (B(\theta, \tau))^q |\widehat{Z}_1(t, \theta) - \widehat{X}_1(t, \theta)|^q - |Z_2^{(\ell)}(t, \theta) - X_2(t, \theta)|^q) + \\
& + (B(\theta, \tau))^{1-3q} \left(8^{1-q} |Z_3(t, \theta) + B(\theta, \tau)X_2'(t, \theta) + \right. \\
& + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2 X_1'(t, \theta) - \xi_3|^q - 4^{1-q} |Z_3^{(\ell)}(t, \theta) - X_3(t, \theta)|^q - \\
& - 2^{1-q} (B(t, \theta))^q |Z_2^{(\ell)'}(t, \theta) - X_2'(t, \theta)|^q - \\
& \left. \left. - 2^{-q} (B(\theta, \tau))^{2q} |Z_1^{(\ell)'}(t, \theta) - X_1'(t, \theta)|^q \right) \right] \right\} \leq C_1 E_{c_1}^{(3)}(\theta, \tau, X(t, \theta), \xi),
\end{aligned}$$

де $C_1 = \exp \{c(p_1(1 + 2^{1-q} + 2^{-q}) + p_2(1 + 2^{1-q}) + p_3)\}$, а $c_1 = 8^{1-q} c$.

Для завершення доведення нерівності (29) запишемо

$$\begin{aligned}
E_{c_1}^{(3)}(\theta, \tau, X(t, \theta), \xi) &= \exp \left\{ -c_1 \left[(B(\theta, \tau))^{1-q} |x_1 - \xi_1|^q + (B(\theta, \tau))^{1-2q} \times \right. \right. \\
& \times |X_2(t, \theta) + B(\theta, \tau)\widehat{x}_1 - \xi_2|^q + (B(\theta, \tau))^{1-3q} |X_3(t, \theta) + \\
& \left. \left. + B(\theta, \tau)X_2'(t, \theta) + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2 x_1' - \xi_3 \right|^q \right] \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \exp \left\{ -c_1 \left[(B(\theta, \tau))^{1-q} |x_1 - \xi_1|^q + (B(\theta, \tau))^{1-2q} |X_2(t, \tau) - \xi_2|^q + (B(\theta, \tau))^{1-3q} |X_3(t, \tau) - \xi_3|^q \right] \right\} \leq E_{c_1}^{(3)}(t, \tau, x, \xi).$$

Нерівність (29) доведено.

Твердження (30) і (31) доводимо аналогічно до (29). Оскільки

$$E_{c_1}^{(3)}(\theta, \tau, (\lambda_1, Z_2^{(\ell)}(t, \theta), Z_3^{(\ell)}(t, \theta)), \xi) = \exp \left\{ -c_1 \left[(B(\theta, \tau))^{1-q} |\lambda_1 - \xi_1|^q + (B(\theta, \tau))^{1-2q} |Z_2^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)\widehat{\lambda}_1 - \xi_2|^q + (B(\theta, \tau))^{1-3q} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times |Z_3^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)Z_2^{(\ell)'}(t, \theta) + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2\widehat{\lambda}_1 - \xi_3|^q \right] \right\},$$

$$E_{c_1}^{(3)}(\theta, \tau, (\lambda_1, \lambda_2, Z_3^{(\ell)}(t, \theta)), \xi) = \exp \left\{ -c_1 \left[(B(\theta, \tau))^{1-q} |\lambda_1 - \xi_1|^q + (B(\theta, \tau))^{1-2q} |\Lambda_2(t, \theta) + B(\theta, \tau)\widehat{\lambda}_1 - \xi_2|^q + (B(\theta, \tau))^{1-3q} |Z_3^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)\lambda_2' + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2\lambda_1' - \xi_3|^q \right] \right\},$$

$$\ell \in \mathbb{N}_3,$$

то маємо такі нерівності:

$$\begin{aligned} & \left| Z_3^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)Z_2^{(\ell)'}(t, \theta) + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2\lambda_1' - \xi_3 \right|^q = \\ & = \left| (Z_3^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)X_2'(t, \theta) + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2\lambda_1' - \xi_3) + \right. \\ & \left. + B(\theta, \tau)(Z_2^{(\ell)'}(t, \theta) - X_2'(t, \theta)) \right|^q \geq 2^{1-q} \left| Z_3^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)X_2'(t, \theta) + \right. \\ & \left. + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2\lambda_1' - \xi_3 \right|^q - (B(\theta, \tau))^q \left| Z_2^{(\ell)'}(t, \theta) - X_2'(t, \theta) \right|^q \geq \\ & \geq 4^{1-q} \left| X_3(t, \theta) + B(\theta, \tau)X_2'(t, \theta) + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2\lambda_1' - \xi_3 \right|^q - \\ & - 2^{1-q} \left| Z_3^{(\ell)}(t, \theta) - X_3(t, \theta) \right|^q - (B(\theta, \tau))^q \left| Z_2^{(\ell)'}(t, \theta) - X_2'(t, \theta) \right|^q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| Z_2^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)\widehat{\lambda}_1 - \xi_2 \right|^q = \left| (X_2(t, \theta) + B(\theta, \tau)\widehat{\lambda}_1 - \xi_2) + \right. \\ & \left. + (Z_2^{(\ell)}(t, \theta) - X_2(t, \theta)) \right|^q \geq 2^{1-q} \left| X_2(t, \theta) + B(\theta, \tau)\widehat{\lambda}_1 - \xi_2 \right|^q \\ & - \left| Z_2^{(\ell)}(t, \theta) - X_2(t, \theta) \right|^q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| Z_3^{(\ell)}(t, \theta) + B(\theta, \tau)\lambda_2' + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2\lambda_1' - \xi_3 \right|^q = \left| X_3(t, \theta) + B(\theta, \tau)\lambda_2' + \right. \\ & \left. + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2\lambda_1' - \xi_3 + (Z_3^{(\ell)}(t, \theta) - X_3(t, \theta)) \right|^q \geq \\ & \geq 2^{1-q} \left| X_3(t, \theta) + B(\theta, \tau)\lambda_2' + 2^{-1}(B(\theta, \tau))^2\lambda_1' - \xi_3 \right|^q + \end{aligned}$$

$$+ \left| Z_3^{(\ell)}(t, \theta) - X_3(t, \theta) \right|^q,$$

$$\ell \in \mathbb{N}_3.$$

Твердження (30) є наслідком з нерівностей

$$\begin{aligned} (B(\theta, \tau))^{1-2q} \left| X_2(t, \theta) + B(\theta, \tau) \widehat{\lambda}_1 - \xi_2 \right|^q &= (B(\theta, \tau))^{1-2q} \left| (X_2(t, \theta) - \xi_2) + \right. \\ &+ B(\theta, \tau) (\widehat{\lambda}_1 - \widehat{x}_1) \left. \right|^q \geq 2^{1-q} (B(t, \tau))^{1-2q} \left| X_2(t, \tau) - \xi_2 \right|^q - \\ &- (B(t, \theta))^{1-q} \left| \lambda_1 - x_1 \right|^q, \\ (B(\theta, \tau))^{1-3q} \left| X_3(t, \theta) + B(\theta, \tau) X_2'(t, \theta) + 2^{-1} (B(\theta, \tau))^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^q &= \\ = (B(\theta, \tau))^{1-3q} \left| (x_3 + B(t, \theta) x_2' + 2^{-1} (B(t, \theta))^2 x_1' + \right. \\ &+ B(\theta, \tau) x_2' + B(\theta, \tau) B(t, \theta) x_1' + 2^{-1} (B(\theta, \tau))^2 x_1' - \xi_3) + \\ &+ 2^{-1} (B(\theta, \tau))^2 (\lambda_1' - x_1') \left. \right|^q \geq 2^{1-q} (B(t, \tau))^{1-3q} \left| X_3(t, \tau) - \xi_3 \right|^q - \\ &- 2^{-q} (B(t, \theta))^{1-q} \left| x_1 - \lambda_1 \right|^q. \end{aligned}$$

Аналогічно з нерівності

$$\begin{aligned} \left| X_3(t, \theta) + B(\theta, \tau) \lambda_2' + 2^{-1} (B(\theta, \tau))^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^q &= \\ = \left| (X_3(t, \theta) - \xi_3) + B(\theta, \tau) (\lambda_2' - X_2'(t, \theta)) + \right. \\ &+ 2^{-1} (B(\theta, \tau))^2 (\lambda_1' - x_1') \left. \right|^q \geq 4^{1-q} \left| X_3(t, \theta) - \xi_3 \right|^q - \\ &- 2^{1-q} (B(\theta, \tau))^q \left| \lambda_2' - X_2'(t, \theta) \right|^q - 2^{-q} (B(\theta, \tau))^{2q} \left| \lambda_1' - x_1' \right|^q \end{aligned}$$

отримаємо (31), де $c_1 = 4^{1-q} c$, $c_2 = 2^{1-q} c$, $c_3 = c_1$. \blacklozenge

Перейдемо до доведення тверджень **леми 2**. Оцінки (32)–(35) і (39) доводяться так само, як і в [26, Гл. 1]. Доведемо нерівності (36)–(38). Спочатку наведемо деякі співвідношення для коефіцієнтів ряду (11), які визначаються формулами (8). Нехай \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 – деякі сталі, $\tilde{C} = \max\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2\}$, а $\tilde{C}_3 = 2e\tilde{C}$. Для заданого числа $\chi \in (0, 1)$ через j_0 позначимо найменше натуральне число, для якого справджується нерівність $j_0\chi \geq 1$. Використовуватимемо також такі позначення:

$$C(\chi) := C_1 \Gamma(\chi) C_0^\chi, \quad C_0^\chi := \max_{1 \leq j \leq j_0} \left\{ \Gamma(j\chi + 1) (\Gamma(j + 1)\chi + 1)^{-1} \right\}.$$

Тоді

$$\tilde{C}_1^\ell a_\ell^{(\chi, \tilde{C}_2)}(t, \tau) = a_\ell^{(\chi, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2)}(t, \tau), \quad t > \tau, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (53)$$

$$a_\ell^{(\chi, \tilde{C}_1)}(t, \tau) \leq a_\ell^{(\chi, \tilde{C}_2)}(t, \tau), \quad \tilde{C}_1 < \tilde{C}_2, \quad t > \tau, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (54)$$

$$a_{\ell+1}^{(\chi, \tilde{C}_1)}(t, \tau) \leq C(\chi) (B(t, \tau))^\chi a_\ell^{(\chi, \tilde{C}_1)}(t, \tau), \quad t > \tau, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (55)$$

$$a_\ell^{(\chi, \tilde{C}_1)}(t, \tau) a_j^{(\chi, \tilde{C}_2)}(t, \tau) \leq a_{\ell+j}^{(\chi, \tilde{C}_3)}(t, \tau), \quad t > \tau, \quad \{j, \ell\} \in \mathbb{N}. \quad (56)$$

Співвідношення (53)–(55) безпосередньо впливають з означення (8). Доведемо нерівність (56). Розглянемо спершу випадок $\ell < j$. Маємо

$$\begin{aligned}
a_\ell^{(\chi, \tilde{C}_1)}(t, \tau) a_j^{(\chi, \tilde{C}_2)}(t, \tau) &\leq a_\ell^{(\chi, \tilde{C})}(t, \tau) a_j^{(\chi, \tilde{C})}(t, \tau) = (\tilde{C} \Gamma(\chi) (B(t, \tau))^\chi)^{\ell+j} \times \\
&\times (\Gamma(\ell\chi + 1) \Gamma(j\chi + 1))^{-1} = (\tilde{C} \Gamma(\chi) (B(t, \tau))^\chi)^{\ell+j} \times \\
&\times (\Gamma((j + \ell)\chi + 2) \Gamma(j\chi + 1))^{-1} (B(\ell\chi + 1, j\chi + 1))^{-1} = \\
&= a_{j+\ell}^{(\chi, \tilde{C})}(t, \tau) ((j + \ell)\chi + 1)^{-1} (B(\ell\chi + 1, j\chi + 1))^{-1},
\end{aligned}$$

де $V(\cdot, \cdot)$ – бета-функція Ейлера. Оцінимо знизу добуток

$$\begin{aligned}
&((j + \ell)\chi + 1) V(\ell\chi + 1, j\chi + 1) \geq \\
&\geq ((j + \ell)\chi + 1) \int_{2^{-1}((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}}^{((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}} s^{\ell\chi} (1-s)^{j\chi} ds \geq \\
&\geq ((j + \ell)\chi + 1) \left((2^{-1}((j + \ell)\chi + 1))^{-1/(\ell\chi+1)} \right)^{\ell\chi} \times \\
&\times \left((1 - ((j + \ell)\chi + 1)^{-1/(\ell\chi+1)}) \right)^{j\chi} \int_{2^{-1}((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}}^{((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}} ds \geq \\
&\geq 2^{-1-\ell\chi} (1 - ((j + \ell)\chi + 1)^{-1/(\ell\chi+1)})^{((j+\ell)\chi+1)^{1/(\ell\chi+1)}(\ell\chi+1)} \geq \\
&\geq (2e)^{-(\ell\chi+1)} \geq (2e)^{-(\ell+j)}.
\end{aligned}$$

Отже, нерівність (56) справджується для $\ell < j$, при цьому $\tilde{C}_3 = 2e\tilde{C}$. Протилежний випадок $\ell > j$ розглядаємо аналогічно. За допомогою означень (7)–(11') та оцінок (32)–(34) маємо

$$\begin{aligned}
(B(t, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_{c, \tilde{C}}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi &\leq (B(t, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} F_{c, \tilde{C}}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi \leq \\
&\leq (B(t, \tau))^{-M} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, \tilde{C})}(t, \tau) \int_{\mathbb{R}^n} E_{c\delta^j}^{(3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi = \\
&= (B(t, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, \tilde{C})}(t, \tau) \delta^{-nj/q} = C_1 F_0^{(\chi, \tilde{C}_1)}, \\
F_0^{(\chi, \tilde{C}_1)} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, \tilde{C}_1)}(t, \tau), \tag{57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B(t, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_{c, \tilde{C}}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi_2 d\xi_3 &= (B(t, \tau))^{-M} E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) \times \\
&\times \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, \tilde{C})}(t, \tau) \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_{c\delta^j}^{(3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi_2 d\xi_3 = \\
&= (B(t, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi_2 d\xi_3 E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) \times \\
&\times \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, \tilde{C}_2)}(t, \tau) E_{c\delta^j}^{(1)}(t, \tau, x_1, \xi_1) = C_2 E_{c, \tilde{C}_2}^{(\chi, 1)}(t, \tau, x_1, \xi_1), \\
\tilde{C}_2 &= \tilde{C} \delta^{-(n_2+n_3)/q}, \tag{58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (B(t, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} E_{c, \tilde{C}}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi) d\xi_3 = (B(t, \tau))^{-M} E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) \times \\
& \times \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, \tilde{C})}(t, \tau) E_{c\delta^j}^{(2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^{n_3}} E_{c\delta^j}^3(t, \tau, X_3(t, \tau) - \xi_3) d\xi_3 = \\
& = C_3 E_{c, \tilde{C}_3}^{(\chi, 2)}(t, \tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2), \quad \tilde{C}_3 = \tilde{C} \delta^{-n_3/q}. \tag{59}
\end{aligned}$$

В оцінках (57)–(59) сталі C_j , $j \in \mathbb{N}_3$, такі, як у рівностях (32)–(34) відповідно. З нерівностей (57)–(59) випливають оцінки (36)–(38). Оцінка (40) є наслідком (39).

Беручи до уваги нерівності

$$\begin{aligned}
E_c^{(3)}(t, \tau, z^{(r)}, \xi) &= \exp \left\{ -c \left[(B(t, \tau))^{1-q} |(x_1 - \xi_1) + \delta_{r1}(z_1 - x_1)|^q + \right. \right. \\
& + (B(t, \tau))^{1-2q} |(X_2(t, \tau) - \xi_2) + B(t, \tau)\delta_{r1}(\tilde{z}_1 - \hat{x}_1) + \delta_{r2}(z_2 - x_2)|^q + \\
& + (B(t, \tau))^{1-3q} |(X_3(t, \tau) - \xi_3) + 2^{-1}(B(t, \tau))^2 \delta_{r1}(z'_1 - x'_1) + \\
& \left. \left. + B(t, \tau)\delta_{r2}(z'_2 - x'_2) + \delta_{r3}(z_3 - x_3)|^q \right] \right\} \leq \\
& \leq \exp \left\{ -c \left[2^{1-q} (B(t, \tau))^{1-q} |x_1 - \xi_1|^q - (B(t, \tau))^{1-q} \delta_{r1} - \right. \right. \\
& - |z_1 - x_1|^q + 4^{1-q} (B(t, \tau))^{1-2q} |X_2(t, \tau) - \xi_2|^q - \\
& - 2^{1-q} (B(t, \tau))^{1-q} \delta_{r1} |\tilde{z}_1 - \hat{x}_1|^q - (B(t, \tau))^{1-2q} \delta_{r2} |z_2 - x_2|^q + \\
& + 8^{1-q} (B(t, \tau))^{1-3q} |X_3(t, \tau) - \xi_3|^q - \\
& - 4^{1-q} (B(t, \tau))^{1-q} \delta_{r1} |z'_1 - x'_1|^q + (B(t, \tau))^{1-2q} \delta_{r2} |z'_2 - x'_2|^q - \\
& \left. \left. - (B(t, \tau))^{1-3q} \delta_{r3} |z_3 - x_3|^q \right] \right\} \leq C_1 E_{c_1}^{(3)}(t, \tau, z^{(r)}, \xi), \\
C_1 &= \exp \{ c(p_1(1 + 2^{1-q} + 2^{-q}) + p_2(1 + 2^{1-q}) + p_3) \}, \quad c_1 = 8^{1-q} c,
\end{aligned}$$

та нерівності (20), отримаємо

$$E_c^{(3)}(t, \tau, z^{(r)}, \xi) \leq C_1 E_{c_1}^{(3)}(t, \tau, x, \xi), \quad t > \tau, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{Z}_3.$$

Із цієї нерівності та оцінок (29)–(31) випливає, що твердження (41) достатньо довести для $r = s = 0$, тобто оцінити інтеграли I_0^{ℓ} , $\ell \in \mathbb{N}_3$. Доведення оцінок (41)–(43) для інтегралів $I_0^{s\ell}$, $I_1^{s\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, та I_2^{s2} , $s \in \mathbb{N}_3$, проводимо аналогічно до відповідних доведень з праць [12, 13]. За допомогою цих оцінок, а також означення (11) оцінювальної функції $F_{c, \tilde{C}}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi)$ отримуємо оцінки (44)–(47). \blacklozenge

Д о в е д е м о л е м у 4. Подібно до доведення **леми 3** (див. [26, с. 36–38]) отримуємо, що ряд (51) мажорується рядом

$$C_0(B(t, \tau))^{-M-1} \left(\sum_{m=1}^{m_0} (B(t, \tau))^{m\chi} E_{c, \tilde{C}_1}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi) + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell}^{(\chi, \tilde{C}_2)}(t, \tau) E_{c, \tilde{C}_1}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi) \right) =: C_0(B(t, \tau))^{-M-1} (R_1 + R_2). \quad (60)$$

Доданок R_1 має потрібну оцінку:

$$\begin{aligned} R_1 &\leq (B(t, \tau))^\chi \sum_{m=1}^{m_0} (B(t, \tau))^{(m-1)\chi} E_{c, \tilde{C}_1}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi) = \\ &= C_1 (B(t, \tau))^\chi E_{c, \tilde{C}_1}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi). \end{aligned} \quad (61)$$

Для оцінки R_2 використовуємо нерівності (20), (53)–(56):

$$\begin{aligned} R_2 &= E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell}^{(\chi, \tilde{C}_2)}(t, \tau) \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi, \tilde{C}_1)}(t, \tau) E_{c\delta^j}^{(3)}(t, \tau, x, \xi) \leq \\ &\leq E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) a_0^{(\chi, \tilde{C}_3)}(t, \tau) \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell}^{(\chi, \tilde{C}_3)}(t, \tau) E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) + \\ &+ E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell}^{(\chi, \tilde{C}_2)}(t, \tau) a_{j-\ell+1}^{(\chi, \tilde{C}_1)}(t, \tau) E_{c\delta^{j-\ell+1}}^{(3)}(t, \tau, x, \xi) \leq \\ &\leq C_2 E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) (B(t, \tau))^\chi \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell}^{(\chi, \tilde{C}_3)}(t, \tau) E_{c\delta^j}^{(3)}(t, \tau, x, \xi) + \\ &+ E_c^1(t, \tau, x_1 - \xi_1) \sum_{j=1}^{\infty} a_{j+1}^{(\chi, 2\tilde{C}_3)}(t, \tau) E_{c\delta^{j+1}}^{(3)}(t, \tau, x, \xi) \sum_{\ell=1}^j 2^{-\ell} \leq \\ &= (C_2 + C(\chi)) (B(t, \tau))^\chi E_{c_1, 2\tilde{C}_3}^{(\chi, 3)}(t, \tau, x, \xi), \quad c_1 = c\delta. \end{aligned} \quad (62)$$

З оцінок (60)–(62) випливає оцінка (52), у якій

$$C_4 = C_0 \max \{C_1, (C_2 + C(\chi))\}, \quad \tilde{C}_4 = 2\tilde{C}_3, \quad c_4 = c, \quad c < c_3, \quad 0 < \delta < 1. \quad \blacklozenge$$

ФРЗК Z_j , $j \in \mathbb{N}_3$, визначаються згідно з наведеними у праці [12] формулами (3), (7) і (11), у яких G_j – параметрикс, а W_j – відповідний об'ємний потенціал з невідомою густиною Q_j . Тому доведення **теорем 1–3** зводиться до визначення і дослідження властивостей функцій G_j , Q_j і W_j .

Аналогічно до відповідних досліджень з [12, 13] доведення проводиться для випадку рівнянь другого порядку з урахуванням властивостей оцінювальних функцій. Зауважимо, що сталі c_j , $j \in \mathbb{N}_3$, які визначають відповідні оцінювальні функції $E_{c_j, \tilde{C}_j}^{(m_j \alpha_j, 3)}(t, \tau, x, \xi)$, $t > \tau$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}_3$, що входять в оцінки ФРЗК Z_j , $j \in \mathbb{N}_3$, та його похідних, є різними, при цьому $c_1 > c_2 > c_3$, а $\tilde{C}_1 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_3$. Тому враховуючи означення (11) і співвідношення між показниками Гельдера, маємо такі нерівності:

$$\begin{aligned} E_{c_1, \tilde{C}_1}^{(m_1 \alpha_1, 3)}(t, \tau, x, \xi) &< E_{c_2, \tilde{C}_2}^{(m_2 \alpha_2, 3)}(t, \tau, x, \xi) < \\ &< E_{c_3, \tilde{C}_3}^{(m_3 \alpha_3, 3)}(t, \tau, x, \xi), \quad t > \tau, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Висновки. У статті запропоновано умови на коефіцієнти вироджених рівнянь типу Колмогорова довільного порядку з двома групами просторових змінних виродження, які додатково мають виродження на початковій гіперплощині, за яких з використанням нової модифікації класичного методу Леві побудовано ФРЗК та одержано оцінки цього розв'язку і його похідних. Отримані оцінки є менш точними, ніж оцінки з праці [24] для рівнянь другого порядку, оскільки оцінювальними функціями в них є не експоненти, а ряди з експонент, типи спадання яких прямують до нуля. Результати статті знайдуть застосування для встановлення коректної розв'язності задачі Коші для рівнянь з розглядуваного класу.

1. Возняк О. Г., Івасишен С. Д. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 11–16.
2. Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2015. – 3, № 3-4. – С. 41–51.
3. Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з двома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – № 871. – С. 46–64.
4. Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2018. – № 898. – С. 13–21.
5. Возняк О., Івасишен С., Мединський І. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторових змінних і виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2019. – Вип. 88. – С. 107–127.
– <https://doi.org/10.30570/vmm.2019.88.107-127>.
6. Ейдельман С. Д., Тичинська Л. М. Побудова фундаментальних розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь довільного порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 11. – С. 896–899.
7. Івасишен С. Д. О начальных значениях решений ультрапараболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1988. – 43, № 4(262). – С. 188–189.
8. Івасишен С. Д., Андросова Л. Н. Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения. – 1991. – 27, № 3. – С. 479–487.
9. Івасишен С. Д., Андросова Л. М. Про інтегральне зображення та початкові значення розв'язків деяких параболічних рівнянь, що вироджуються // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 1. – С. 16–19.
10. Івасишен С. Д., Мединський І. П. Властивості фундаментальних розв'язків, теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 4. – С. 7–16.
Te same: *Ivasyshen S. D., Medynskyi I. P. Properties of fundamental solutions, theorems on integral representations of solutions and correct solvability of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of space variables of degeneration* // J. Math. Sci. – 2021. – 256, No. 4. – P. 363–374. – <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05432-0>.
11. Івасишен С. Д., Мединський І. П. Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – 2, № 2-3. – С. 94–106.
12. Івасишен С. Д., Мединський І. П. Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – 60, № 3. – С. 9–31.
Te same: *Ivasyshen S. D., Medynskyi I. P. Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I* // J. Math. Sci. – 2020. – 246, No. 2. – P. 121–151. – <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04726-z>.

13. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 4. – С. 7–24.
Te same: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. II // *J. Math. Sci.* – 2020. – **247**, No. 1. – P. 1–23. – <https://doi.org/10.1007/s10958-020-044786-1>.
14. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // *Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. Праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець.* – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.
15. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 2. – С. 28–42.
Te same: *Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.* On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables // *J. Math. Sci.* – 2018. – **231**, No. 4. – P. 507–526. – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3830-0>.
16. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 1. – С. 7–24.
Te same: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* The fundamental solution of the Cauchy problem for degenerated parabolic Kolmogorov-type equations of arbitrary order // *J. Math. Sci.* – 2021. – **258**, No. 4. – P. 369–391. – <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05554-5>.
17. *Малицкая А. П.* О вырождающихся параболических уравнениях с возрастающими коэффициентами // *Укр. мат. журн.* – 1989. – **41**, № 2. – С. 176–181.
Te same: *Malitskaya A. P.* Degenerate parabolic equations whose coefficients are increasing // *Ukr. Math. J.* – 1989. – **41**, No. 1. – P. 158–163. – <https://doi.org/10.1007/BF01060380>.
18. *Малицкая А. П.* Построение фундаментального решения для одного класса вырождающихся параболических уравнениях высокого порядка // *Укр. мат. журн.* – 1980. – **32**, № 6. – С. 754–762.
Te same: *Malitskaya A. P.* Construction of a fundamental solution for a class of high-order degenerate parabolic equations // *Ukr. Math. J.* – 1980. – **32**, No. 6. – P. 508–514. – <https://doi.org/10.1007/BF01087180>.
19. *Малицкая А. П.* Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка // *Укр. мат. журн.* – 1985. – **37**, № 6. – С. 713–718.
Te same: *Malitskaya A. P.* Structure of the fundamental solutions of ultraparabolic equations of high order // *Ukr. Math. J.* – 1985. – **37**, No. 6. – P. 582–587. – <https://doi.org/10.1007/BF01057424>.
20. *Малицкая А. П.* Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений // *Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений.* – Киев: Киев. пед. ин-т, 1973. – С. 109–130.
21. *Мединський І. П.* Коректна розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 4. – С. 39–48.
Te same: *Medynsky I. P.* Correct solvability of the Cauchy problem and integral representations of solutions for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration // *J. Math. Sci.* – 2022. – **265**, No. 3. – P. 382–393. – <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06059-5>.
22. *Процак Н. П., Пташник Б. Й.* Нелінійні ультрапараболічні рівняння та варіаційні нерівності. – Київ: Наук. думка, 2017. – 280 с.
23. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // *Дифференц. уравнения.* – 1975. – **11**, № 7. – С. 1316–1330.
24. *Citti G., Pascucci A., Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance // *Differ. Integral Equat.*

- 2001. – **14**, No. 6. – P. 701–738.
 – <https://doi.org/10.57262/die/1356123243>.
25. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D. On solutions of parabolic equations from families of Banach spaces dependent on time // In: Adamyan V. M. et al. (eds) / *Differential Operators and Related Topics*. – Basel: Birkhäuser, 2000. – P. 111–125. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 117).
 – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8403-7_10.
 26. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152).
 – <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9>.
 27. Foschi P., Pascucci A. Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems // *Lect. Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica*. – Università degli Studi della Basilicata, 2007. – **VI**. – P. 145–156.
 28. Di Francesco M., Pascucci A. A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing // *J. Math. Anal. Appl.* – 2007. – **336**, No. 2. – P. 1026–1041. – <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.031>.
 29. Di Francesco M., Pascucci A. On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // *Appl. Math. Res. Express*. – 2005. – **2005**, No. 3. – P. 77–116.
 – <https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77>.
 30. Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. The Fokker–Planck–Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes // *Theory Stoch. Process.* – 2010. – **16(32)**, No. 1. – P. 57–66.
 31. Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations // *Мат. студії*. – 2017. – **47**, № 1. – С. 33–46.
 – <https://doi.org/10.15330/ms47.1.33-46>.
 32. Kolmogoroff A. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // *Ann. Math.* – 1934. – **35**, No. 1. – P. 116–117. – <https://doi.org/10.2307/1968123>.
 33. Lanconelli E., Polidoro S. On a class of hypoelliptic evolution operators // *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. Partial Diff. Eqs.* – 1994. – **52**, No. 1. – P. 29–63.
 34. Pascucci A. Kolmogorov equations in physics and in finance // In: *Elliptic and Parabolic Problems*. – Basel: Birkhäuser, 2005. – Ser.: *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications* / Ed. H. Brezis. – Vol. 63. – P. 353–364. – https://doi.org/10.1007/3-7643-7384-9_35.
 35. Polidoro S. On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // *Le Matematiche*. – 1994. – **49**, No. 1. – P. 53–105.
 36. Voznyak O. G., Dron V. S., Medynskyi I. P. Properties of fundamental solutions, correct solvability of the Cauchy problem and integral representations of solutions for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane // *Math. Model. Comput.* – 2022. – **9**, No. 3. – P. 779–790. – <https://doi.org/10.23939/mmc2022.03.779>.

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR DEGENERATE PARABOLIC KOLMOGOROV-TYPE EQUATIONS OF ARBITRARY ORDER WITH DEGENERATION ON THE INITIAL HYPERPLANE

The degenerate parabolic Kolmogorov-type equations of arbitrary order with two groups of spatial variables of degeneration, which, besides that, have degeneration on the initial hyperplane, and coefficients, which depend on all variables, are considered. The fundamental solution of the Cauchy problem for these equations is constructed. The estimates are obtained for this solution and its derivatives.

Key words: *parabolic equations of arbitrary order, degenerated parabolic Kolmogorov type equation, degeneration on the initial hyperplane, fundamental solution of the Cauchy problem, Levi method.*

¹ Західноукр. нац. ун-т, Тернопіль,

² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

³ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів