УДК 512.64

Б. З. Шаваровський[✉]

ОРІЄНТОВАНА ЗА ХАРАКТЕРИСТИЧНИМИ КОРЕНЯМИ ПОЛІНОМІАЛЬНА МАТРИЦЯ З ФІКСОВАНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ ОКРЕМИХ ЇЇ ЕЛЕМЕНТІВ

Доведено існування та єдиність у класі напівскалярно еквівалентних матриць орієнтованої за характеристичними коренями матриці з фіксованими значеннями окремих її елементів. Розроблено метод побудови такої матриці та метод побудови перетворювальних матриць. Встановлена форма матриці може бути використана як у задачі класифікації відносно напівскалярної еквівалентності, так і при розв'язуванні окремих типів матричних різносторонніх рівнянь.

Ключові слова: *матриця простої структури, напівскалярна еквівалентність матриць, спеціальна трикутна форма матриць, орієнтована за характеристичними коренями матриця.*

Вступ. У пропонованій праці викладено деякі результати досліджень напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць простої структури, започаткованих автором у [5, 6, 11, 12] . Зокрема, за певних обмежень доведено теореми існування та єдиності матриці, напівскалярно еквівалентної до заданої поліноміальної матриці, із наперед заданими значеннями елементів її першого стовпця на множині коренів полінома, що слугує її першим неодиничним інваріантним множником. Така матриця з фіксованими значеннями визначається однозначно, тому може бути використана для класифікації виділеного типу матриць відносно напівскалярно еквівалентних перетворень. Доведення теореми існування є конструктивним. У ньому вказано послідовність напівскалярно еквівалентних перетворень вихідної матриці, що у підсумку приводить до потрібного результату, а саме до матриці з вибраними значеннями певних її елементів. Тому таке доведення може послужити як практичним методом зведення матриці до напівскалярно еквівалентної до неї матриці з потрібними властивостями, так і методом побудови перетворювальних (лівої і правої) матриць. Під поліноміальною матрицею простої структури розуміємо таку, всі елементарні дільники якої є лінійними [3]. У матриці простої структури алгебраїчна та геометрична кратності кожного її характеристичного кореня збігаються. Згідно з [3, 4], поліноміальні матриці називаються напівскалярно еквівалентними, якщо одну з них можна отримати множенням іншої зліва і справа на числову неособливу та поліноміальну оборотну матриці відповідно. Напівскалярну еквівалентність матриць $A(x)$, $B(x)$ позначатимемо $A(x) \approx B(x)$.

Отриманий у статті результат стосовно класифікації поліноміальних матриць відносно напівскалярної еквівалентності знайде застосування у задачі класифікації наборів числових матриць з точністю до подібності, а також багатьох інших класифікаційних задачах. Розроблені у доведенні теореми існування методи зведення матриці та побудови перетворювальних матриць будуть ефективними при розв'язуванні матричних рівнянь типу $A(x)Y(x) - XB(x) = 0$, коли потрібно знайти оборотну і неособливу матриці $Y(x)$ і X над $\mathbb{C}[x]$ і $\mathbb{C}$ відповідно.

Більше інформації про властивості матриць простої структури, напівскалярно еквівалентні перетворення матриць, класифікаційні задачі та розв'язування деяких матричних рівнянь можна знайти в уже згаданих працях [3–6, 11, 12], а також у працях [1, 2, 7–10] і цитованій там літературі.

✉ bshavarovskii@gmail.com

DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.3-4.64-83

1. Попередні відомості та позначення. Через E_t надалі позначатимемо одиничну матрицю порядку t. Запис $(a_1(x), a_2(x), \dots, a_t(x))$ означатиме найбільший спільний дільник поліномів $a_1(x), a_2(x), \dots, a_t(x)$.

Нехай матриця $F(x) \in M(n, \mathbb{C}[x])$ з формою Сміта $\operatorname{diag}(1, \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x))$ має просту структуру. На основі результатів [3, 4] за допомогою напівскалярно еквівалентних перетворень можна звести $F(x)$ до матриці нижнього трикутного вигляду з інваріантними множниками $1, \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ на головній діагоналі. Отримана матриця є напівскалярно еквівалентною до визначеної в [6] орієнтованої за характеристичними коренями матриці

$$A(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & \varphi_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \dots & \varphi_{n-1}(x) \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Матрицю $A(x)$ зобразимо у вигляді

$$A(x) = \bar{A}(x) \operatorname{diag}(1, \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x))$$

і через $\bar{A}^{(i_1,\dots,i_t)}_{(j_1,\dots,j_t)}(x)$ позначимо мінор матриці $\bar{A}(x)$ в рядках і стовпцях із номерами $i_1, \dots, i_t$ і $j_1, \dots, j_t$ відповідно. Припустимо, що $A(x)$ орієнтована за характеристичними коренями $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, які є коренями полінома $\varphi_1(x)$, $\deg \varphi_1(x) > 1$, що слугує її першим неодиничним інваріантним множником. Орієнтація $A(x)$ за коренями $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ (див. означення [6]) означає, що $a_{i+1,1}(\alpha_i) \neq 0$, $a_{i+1,1}(\alpha_{j-1}) = 0$, $i, j = 1, \dots, n-1$, $i \geq j$. Далі для $A(x)$ знайдемо найбільші спільні дільники $(a_{i+1,1}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))$, $i = 1, \dots, n-1$, на основі яких визначимо поліноми

$$\psi_i(x) := \frac{(a_{i+2,1}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))}{(a_{i+1,1}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))}, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{2}$$

де $\psi_{n-1}(x) := \dfrac{\varphi_1(x)}{(a_{n1}(x), \varphi_1(x))}$. Зазначені найбільші спільні дільники, як показано в [5], а відтак і поліноми $\psi_i(x)$ визначаються класом напівскалярно еквівалентних матриць з $A(x)$ (при фіксованій орієнтації) однозначно. Позначимо через M_{φ_i} і M_{ψ_i} множини коренів поліномів $\varphi_i(x)$ і $\psi_i(x)$ відповідно, $i = 1, \dots, n-1$. Очевидно, $M_{\varphi_i} \neq \varnothing$ і $M_{\psi_i} \neq \varnothing$, оскільки за припущенням $\deg \varphi(x) > 1$ і $\alpha_i \in M_{\psi_i}$. Побудуємо матриці вигляду

$$N_{\left\| \begin{smallmatrix} 1 \\ a_{21}(x) \end{smallmatrix} \right\|}(\psi_1(x)), \quad N_{\left\| \begin{smallmatrix} a_{21}(x) \\ \vdots \\ a_{k+1,1}(x) \end{smallmatrix} \right\|}(\psi_k(x)), \quad k = 2, \dots, n-1. \tag{3}$$

Тут $N_{G(x)}(\psi(x))$ означає рядкове значення довільної матриці $G(x)$ на множині коренів деякого полінома $\psi(x)$, тобто, якщо $\psi(x)$ має лише прості (кратності 1) корені $\gamma_1, \dots, \gamma_u$, то $N_{G(x)}(\psi(x)) = \| G(\gamma_1) \ \dots \ G(\gamma_u) \|$ (означення див. [6]). Далі припускатимемо, що степені поліномів (2) і ранги матриць (3) не менші 2. За таких умов $a_{21}(\alpha_1) \neq a_{21}(\beta_1)$ для деякого $\beta_1 \in M_{\psi_1}$ і кожна з послідовностей

$$\frac{a_{k1}(\alpha_k)}{a_{k+1,1}(\alpha_k)} - \frac{a_{k1}(\beta_k)}{a_{k+1,1}(\beta_k)}, \ \ldots, \ \frac{a_{21}(\alpha_k)}{a_{k+1,1}(\alpha_k)} - \frac{a_{21}(\beta_k)}{a_{k+1,1}(\beta_k)}, \quad k = 2, \ldots, n-1, \quad (4)$$

містить ненульові елементи для деякого $\beta_k \in M_{\psi_k}$.

2. Зведення матриці до вигляду із заздалегідь заданими характеристиками. У цьому параграфі для виділеного типу матриць простої структури доведено існування матриці, напівскалярно еквівалентної до заданої матриці і орієнтованої за характеристичними коренями, із наперед фіксованими значеннями окремих її елементів. Доведення реалізовано у вигляді ланцюжка перетворень вихідної матриці, що у підсумку приводить до матриці із заздалегідь заданими характеристиками. Якщо матриця має порядок n, то для досягнення потрібного результату необхідно виконати $(n^2 - n)/2$ напівскалярно еквівалентних редукцій з елементарною лівою перетворювальною матрицею (тобто, з єдиним ненульовим недіагональним елементом). Ця матриця вказується на кожному етапі перетворень. При цьому на кожному кроці також визначається обернена до відповідної правої перетворювальної матриці. Отже, після завершення зведення вихідної матриці до матриці із заданими характеристиками можна побудувати підсумкові ліву і праву перетворювальні матриці як добутки відповідних перетворювальних матриць на кожному етапі. Таким чином, встановлено метод знаходження матриці, напівскалярно еквівалентної до вихідної матриці, з потрібними властивостями та метод побудови перетворювальних матриць, які реалізовують відповідне зведення.

Теорема 1. *Нехай задано орієнтовану за характеристичними коренями* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ *полінома* $\varphi_1(x)$ *матрицю* $A(x)$ (1), *для якої степені поліномів* (2) *та ранги матриць* (3) *не менші* 2. *Нехай також для деякого набору коренів* $\beta_i \in M_{\psi_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, *маємо* $a_{21}(\alpha_1) \neq a_{21}(\beta_1)$ *і першим ненульовим елементом послідовності* (4) *є*

$$\frac{a_{w_k,1}(\alpha_k)}{a_{k+1,1}(\alpha_k)} - \frac{a_{w_k,1}(\beta_k)}{a_{k+1,1}(\beta_k)}, \quad k = 2, \ldots, n-1, \quad 2 \le w_k \le k,$$

де $a_{w_k,1}(\alpha_k) \neq 0$.

Тоді матриця $A(x)$ *є напівскалярно еквівалентною до орієнтованої за тими самими характеристичними коренями* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ *матриці вигляду*

$$B(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ b_{31}(x) & b_{32}(x) & \varphi_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & b_{n3}(x) & \ldots & \varphi_{n-1}(x) \end{Vmatrix}, \quad (5)$$

для якої значення

$$b_{21}(\alpha_1) = \frac{b_{w_k,1}(\alpha_k)}{b_{k+1,1}(\alpha_k)} = 1, \quad b_{21}(\beta_1), \quad \frac{b_{w_k,1}(\beta_k)}{b_{k+1,1}(\beta_k)}, \quad \frac{b_{21}(\alpha_k)}{b_{k+1,1}(\alpha_k)}, \quad \ldots,$$

$$\frac{b_{k1}(\alpha_k)}{b_{k+1,1}(\alpha_k)}, \quad b_{k+1,1}(\alpha_k), \quad k = 2, \ldots, n-1, \quad (6)$$

є заздалегідь вибраними.

Зауваження. *Вказані в теоремі умови для коренів* β_i *не є додатковим обмеженням. Вони є наслідком того, що ранги матриць* (3) *перевищують* 1. *Умова* $a_{w_k,1}(\alpha_k) \neq 0$ *легко досягається, якщо поміняти ролями* α_k *і* β_k.

Д о в е д е н н я. Можемо вважати, що для коренів $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, за якими орієнтована матриця $A(x)$, виконуються умови $a_{21}(\alpha_1) = \dfrac{a_{w_k,1}(\alpha_k)}{a_{k+1,1}(\alpha_k)} = 1$, $k = 2, \ldots, n-1$. Це легко досягається множенням $A(x)$ зліва і справа на відповідні числові діагональні матриці. Для вказаного в умові теореми кореня $\beta_1 \in M_{\psi_1}$ позначимо $A_{12} := a_{21}(\beta_1)$ і виберемо B_{12} так, що

$$B_{12} \neq \begin{cases} 0, \\ 1, \\ A_{12}, \\ \dfrac{A_{12} a_{21(\gamma)}}{a_{21(\gamma)} - A_{12}} \quad \text{для кожного } \gamma \in M_{\varphi_1}. \end{cases}$$

Покладемо $r_{11}(x) = s_{11} + s_{12} a_{21}(x)$, де $s_{11} = \dfrac{A_{12}(B_{12}-1)}{B_{12}(A_{12}-1)}$, $s_{12} = \dfrac{A_{12} - B_{12}}{B_{12}(A_{12}-1)}$. Очевидно, $s_{11} + s_{12} = 1$. Розглянемо конгруенцію

$$b_{21}(x) r_{11}(x) \equiv a_{21}(x) (\operatorname{mod} \varphi_1(x)) \tag{7}$$

з невідомим $b_{12}(x)$. Оскільки $(r_{11}(x), \varphi_1(x)) = 1$, то з цієї конгруенції можна знайти $b_{21}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg b_{21}(x) < \deg \varphi_1(x)$. Легко переконатися, що для розв'язку $b_{21}(x)$ маємо $b_{21}(\alpha_0) = 0$, $b_{21}(\alpha_1) = 1$, $b_{21}(\beta_1) = B_{12}$. Якщо прийняти $r_{12}(x) = s_{12}\varphi_1(x)$ і визначити

$$r_{21}(x) = \frac{a_{21}(x) - b_{21}(x) r_{11}(x)}{\varphi_1(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$r_{22}(x) = \frac{\varphi_1(x) - b_{21}(x) r_{12}(x)}{\varphi_1(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

то можна записати матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^2$, яка є оборотною в $\mathbb{C}[x]$. Тому конгруенцію

$$\left\| b_{31}(x) \quad b_{32}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^2 \equiv \left\| a_{31}(x) \quad a_{32}(x) \right\| (\operatorname{mod} \varphi_2(x)) \tag{8}$$

з такою матрицею $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^2$ можна розв'язати відносно невідомих $b_{31}(x)$, $b_{32}(x)$ у кільці $\mathbb{C}[x]$, причому $\deg b_{31}(x), \deg b_{32}(x) < \deg \varphi_2(x)$. За знайденими $b_{31}(x)$, $b_{32}(x)$ визначимо поліноми

$$r_{31}(x) = \frac{a_{31}(x) - b_{31}(x) r_{11}(x) - b_{32}(x) r_{21}(x)}{\varphi_2(x)},$$

$$r_{32}(x) = \frac{a_{32}(x) - b_{31}(x) r_{12}(x) - b_{32}(x) r_{22}(x)}{\varphi_2(x)} \tag{9}$$

і утворимо матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^3 \in GL(3, \mathbb{C}[x])$, в якій $r_{13}(x) = r_{23}(x) = 0$, $r_{33}(x) = 1$, а $r_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2$, є елементами матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^2$. Конгруенція

$$\left\| b_{41}(x) \quad b_{42}(x) \quad b_{43}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^3 \equiv$$

$$\equiv \left\| a_{41}(x) \quad a_{42}(x) \quad a_{43}(x) \right\| (\operatorname{mod} \varphi_3(x)) \tag{10}$$

з такою матрицею $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^3$ є розв'язною відносно невідомих $b_{4j}(x)$, $j = 1, 2, 3$. На основі знайдених невідомих визначаємо

$$r_{4j}(x) = \frac{a_{4j}(x) - b_{41}(x) r_{1j}(x) - b_{42}(x) r_{2j}(x) - b_{43}(x) r_{3j}(x)}{\varphi_3(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$j = 1, 2, 3, \tag{11}$$

і від матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^3$ переходимо до $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^4 \in GL(4, \mathbb{C}[x])$, в якій $r_{14}(x) = r_{24}(x) = r_{34}(x) = 0$, $r_{44}(x) = 1$. Цей процес можна продовжити. Через $n - 4$ кроки будуть знайдені поліноми $b_{pq}(x)$ степенів менших ніж $\deg \varphi_{p-1}(x)$ та $r_{pq}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $p = 2, \ldots, n$, $q = 1, \ldots, n - 1$, $p > q$. Відповідно прийдемо до матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^n \in GL(n, \mathbb{C}[x])$, у якій нижче головної діагоналі стоять вказані тут поліноми $r_{pq}(x)$, на головній діагоналі усі елементи, крім першого, є одиничними, а всі елементи вище головної діагоналі, окрім $r_{12}(x)$, – нульовими. Зі знайдених поліномів $b_{pq}(x)$ побудуємо матрицю $B(x)$ вигляду (5), яка разом із матрицями $A(x)$, $R(x) = \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^n$ та $S = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \oplus E_{n-2}$ задовольняють рівність

$$\mathrm{S}A(x) = B(x) R(x), \tag{12}$$

тому $A(x) \approx B(x)$. При цьому матриця $B(x)$ є орієнтованою за тими самими характеристичними коренями $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, що й $A(x)$, а значення $b_{21}(\beta_1)$, як уже зазначено вище, дорівнює B_{12}, тобто є заздалегідь вибраним.

Далі, щоб не вводити нові позначення для отриманих щораз нових матриць, будемо вважати, що вже у вихідній матриці $A(x)$ значення $a_{21}(\beta_1)$ є наперед вибраним, тобто $a_{21}(\beta_1) = B_{12}$. Для вказаного в умові теореми кореня β_2 та елементів $a_{21}(x)$, $a_{31}(x)$ цієї матриці позначимо $A_{23} := \dfrac{a_{21}(\beta_2)}{a_{31}(\beta_2)}$. Виберемо B_{23} так, що

$$B_{23} \neq \begin{cases} 1, \\ A_{23}, \\ (A_{23} \bar{A}_{(2)}^{(3)}(\gamma) - 1) / (\bar{A}_{(2)}^{(3)}(\gamma) - 1) \quad \text{для кожного} \quad \gamma \in M_{\varphi_2}. \end{cases}$$

Визначаємо $s_{11} = s_{22} = \dfrac{B_{23} - 1}{A_{23} - 1}$, $s_{23} = \dfrac{A_{23} - B_{23}}{A_{23} - 1}$, $r_{11}(x) = s_{11}$ і з конгруенції

$$b_{21}(x) r_{11}(x) \equiv s_{22} a_{21}(x) + s_{23} a_{31}(x) \pmod{\varphi_1(x)}$$

знаходимо невідомий поліном $b_{21}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg b_{21}(x) < \deg \varphi_1(x)$. Тут, очевидно, $s_{22} + s_{23} = 1$, $s_{22} \neq 0$, $s_{22} \neq 1$ і $b_{21}(\alpha_1) = 1$. За знайденим $b_{21}(x)$ обчислюємо поліном

$$r_{21}(x) = \frac{s_{22} a_{21}(x) + s_{23} a_{31}(x) - b_{21}(x) r_{11}(x)}{\varphi_1(x)}$$

і утворюємо матрицю $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$, в якій $r_{11}(x)=s_{11}$, $r_{12}(x)=0$, $r_{22}(x)=$ $=s_{22}+s_{23}\bar{A}_{(2)}^{(3)}(x)$. Із конгруенції (8) з такою матрицею-коефіцієнтом $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$ можна знайти невідомі поліноми $b_{31}(x)$ і $b_{32}(x)$, степені яких $\deg b_{31}(x), \deg b_{32}(x) < \deg \varphi_2(x)$. Розв'язність цієї конгруенції гарантована взаємною простотою $\det\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$ і $\varphi_2(x)$, в чому легко переконатися, враховуючи вибір B_{23}. Також нескладно перевірити, що для отриманих $b_{21}(x)$, $b_{31}(x)$ маємо $\frac{b_{21}(\beta_2)}{b_{31}(\beta_2)}=B_{23}$. За знайденими $b_{31}(x)$, $b_{32}(x)$ визначимо поліноми $r_{31}(x)$, $r_{32}(x)$ вигляду (9) і побудуємо матрицю $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3$, в якій $r_{13}(x)=0$, $r_{23}(x)=s_{23}\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\in\mathbb{C}[x]$, $r_{33}(x)=\frac{\varphi_2(x)-b_{32}(x)r_{23}(x)}{\varphi_2(x)}\in\mathbb{C}[x]$, а $r_{ij}(x)$, $i,j=1,2$, є елементами матриці $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$. Матриця $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3$ є оборотною, тому конгруенція вигляду (10) з такою матрицею є розв'язною відносно $b_{4j}(x)$, $j=1,2,3$. Використовуючи її розв'язки, знайдемо поліноми $r_{4j}(x)$, $j=1,2,3$, вигляду (11), якими разом з $r_{14}(x)=r_{24}(x)=r_{34}(x)=0$, $r_{44}(x)=1$ облямовуємо $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3$ і отримуємо $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^4\in GL(4,\mathbb{C}[x])$. Продовжуємо цей процес, поки не прийдемо до матриці $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^{n-1}\in GL(n-1,\mathbb{C}[x])$ і конгруенції

$$\left\|b_{n1}(x)\ \ \dots\ \ b_{n,n-1}(x)\right\|\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^{n-1}\equiv$$

$$\equiv\left\|a_{n1}(x)\ \ \dots\ \ a_{n,n-1}(x)\right\| \pmod{\varphi_{n-1}(x)}$$

з невідомими $b_{nj}(x)$, $j=1,\ \dots,n-1$. За розв'язками цієї конгруенції знаходимо поліноми

$$r_{nj}(x)=\frac{a_{nj}(x)-b_{n1}(x)r_{1j}(x)-\ldots-b_{n,n-1}(x)r_{n-1,j}(x)}{\varphi_{n-1}(x)},\quad j=1,\ldots,n-1,$$

які разом з $r_{1n}(x)=\ldots=r_{n-1,n}(x)=0$, $r_{nn}(x)=1$ і $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^{n-1}$ складають матрицю $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^n\in GL(n,\mathbb{C}[x])$. Із сукупності розв'язків $r_{pq}(x)$, $p=2,\ldots,n$, $q=1,\ldots,n-1$, $p>q$, усіх розглянутих вище конгруенцій утворимо матрицю $B(x)$ вигляду (5). Ця матриця є напівскалярно еквівалентною до матриці $A(x)$, оскільки ці дві матриці, а також $R(x)=\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^n$ та $S=\begin{Vmatrix} s_{22} & 0 & 0\\ 0 & s_{22} & s_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\oplus E_{n-3}$ задовольняють співвідношення (12). Отримана матриця $B(x)$ є орієнтованою за тими самими, що і $A(x)$, характеристичними коренями. Вона володіє іншими властивостями матриці $A(x)$, зокрема $b_{21}(\alpha_1)=\frac{b_{21}(\alpha_2)}{b_{31}(\alpha_2)}=1$, $b_{21}(\beta_1)=B_{12}$, а її значення $\frac{b_{21}(\beta_2)}{b_{31}(\beta_2)}=B_{23}$ є заздалегідь вибраними.

Для уникнення введення щоразу нових позначень, далі вважатимемо, що вже вихідна матриця $A(x)$ має фіксовані значення $a_{21}(\beta_1) = B_{12}$, $a_{21}(\beta_2)/a_{31}(\beta_2) = B_{23}$. Позначимо $A_{13} := a_{31}(\alpha_2)(\neq 0)$ для α_2 з множини коренів, за якими орієнтована $A(x)$, і виберемо таке значення B_{13}, що

$$B_{13} \neq \begin{cases} 0, \\ A_{13}, \\ \dfrac{A_{13}\bar{A}_{(1)}^{(3)}(\gamma)}{\bar{A}_{(1)}^{(3)}(\gamma) - A_{13}} & \text{для кожного } \gamma \in M_{\varphi_1}, \\ \dfrac{A_{13}\bar{A}_{(1,2)}^{(2,3)}(\mu)}{\bar{A}_{(1,2)}^{(2,3)}(\mu) + A_{13}} & \text{для кожного } \gamma \in M_{\varphi_2}. \end{cases}$$

Якщо визначити $r_{11}(x) = 1 + s_{13}a_{13}(x)$, де $s_{13} = (B_{13})^{-1} - (A_{13})^{-1}$, то із конгруенції (7) можна знайти поліном $b_{21}(x)$ степеня меншого ніж $\deg\varphi_1(x)$, а за ним – $r_{21}(x) = \dfrac{a_{21}(x) - b_{21}(x)r_{11}(x)}{\varphi_1(x)} \in \mathbb{C}[x]$. Розв'язність конгруенції (7) забезпечує взаємну простоту $r_{11}(x)$ і $\varphi_1(x)$. Із $r_{11}(x)$, $r_{21}(x)$, $r_{12}(x) = s_{13}\varphi_1(x)$ та $r_{22}(x) = \dfrac{\varphi_1(x) - b_{21}(x)r_{12}(x)}{\varphi_1(x)} \in \mathbb{C}[x]$ утворюємо матрицю $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$. Оскільки $\det\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2 = 1 - s_{13}\bar{A}_{(1,2)}^{(2,3)}(x)$, то $\left(\det\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2, \varphi_2(x)\right) = 1$. Тому конгруенцію вигляду (8) з такою матрицею $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$ можна розв'язати відносно $b_{31}(x)$, $b_{32}(x)$. За знайденими розв'язками визначимо поліноми $r_{31}(x)$, $r_{32}(x)$ вигляду (9), до яких долучаємо $r_{13}(x) = s_{13}\varphi_2(x)$, $r_{23}(x) = -\dfrac{b_{21}(x)r_{13}(x)}{\varphi_1(x)} \in \mathbb{C}[x]$, $r_{33}(x) = \dfrac{\varphi_2(x) - b_{31}(x)r_{13}(x) - b_{32}(x)r_{23}(x)}{\varphi_2(x)} \in \mathbb{C}[x]$ і від $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$ переходимо до $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3$. Легко переконатися, що отримана матриця $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3$ є оборотною, а значить конгруенція вигляду (10) з такою матрицею є розв'язною відносно $b_{4j}(x)$, $j = 1,2,3$. Розв'язавши цю конгруенцію, окрім $b_{4j}(x)$, знаходимо також поліноми $r_{4j}(x)$ вигляду (11). Цими поліномами разом з $r_{14}(x) = r_{24}(x) = r_{34}(x) = 0$, $r_{44}(x) = 1$ облямовуємо $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3$ і отримуємо оборотну матрицю $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^4$. Знову розглядаємо відповідну конгруенцію за модулем $\varphi_4(x)$ і розв'язуємо її. Продовжуємо цей процес, поки не дійдемо до матриці $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^n$ і поки не буде знайдена сукупність поліномів $r_{pq}(x)$, $p = 2,\dots,n$, $q = 1,\dots,n-1$, $p > q$, як розв'язків низки конгруенцій типу (7), (8), (10) і так далі. З цих поліномів побудуємо матрицю $B(x)$ вигляду (5), яка є напівскалярно еквівалентною з $A(x)$, оскільки $B(x)$, $A(x)$, отримана на останньому кроці матриця $R(x) = \left\|r_{ij}(x)\right\|_1^n$ та $S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \oplus E_{n-3}$ задовольняють рівність (12). Побудована матриця $B(x)$ успадкувала від $A(x)$ орієнтацію за характеристичними кореням $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, фіксовані значення $b_{21}(\alpha_1) = \dfrac{b_{21}(\alpha_2)}{b_{31}(\alpha_2)} = 1$, $b_{21}(\beta_1) = B_{12}$, $\dfrac{b_{21}(\beta_2)}{b_{31}(\beta_2)} = B_{23}$ та набула заздалегідь вибраного значення $b_{31}(\alpha_2) = B_{13}$.

Щоб не вводити щораз нові позначення, приймаємо, що вже матриця $A(x)$ (1) має вибрані значення B_{12}, B_{23}, B_{13} для $a_{21}(\beta_1)$, $\dfrac{a_{21}(\beta_2)}{a_{31}(\beta_2)}$, $a_{31}(\alpha_2)$ відповідно. Припустимо за індукцією, що у цій матриці $A(x)$ заздалегідь вибраними є значення

$$a_{21}(\alpha_1) = \frac{a_{w_t,1}(\alpha_t)}{a_{t+1,1}(\alpha_t)} = 1, \quad a_{21}(\beta_1), \quad \frac{a_{21}(\alpha_t)}{a_{t+1,1}(\alpha_t)}, \quad \ldots,$$

$$\frac{a_{t1}(\alpha_t)}{a_{t+1,1}(\alpha_t)}, \quad \frac{a_{w_t,1}(\beta_t)}{a_{t+1,1}(\beta_t)}, \quad a_{t+1,1}(\alpha_t) \tag{13}$$

для всіх $t = 2, \ldots, m-1$, $3 \le m \le n-1$. Для визначеності без обмеження загальності та простоти викладу приймемо, що $w_m = m$ (те, що $w_2 = 2$, є очевидним). Тоді $\dfrac{a_{m1}(\alpha_m)}{a_{m+1,1}(\alpha_m)} = 1$. Позначимо $A_{m,m+1} := \dfrac{a_{m1}(\beta_m)}{a_{m+1,1}(\beta_m)}$ $(\neq 1)$ і виберемо $B_{m,m+1}$ так, що

$$B_{m,m+1} \neq \begin{cases} 1, \\ A_{m,m+1}, \\ (A_{m,m+1}\bar{A}_{(m)}^{(m+1)}(\gamma) - 1) / (\bar{A}_{(m)}^{(m+1)}(\gamma) - 1) \quad \text{для всіх} \quad \gamma \in M_{\varphi_m}. \end{cases}$$

Позначимо також

$$s_{mm} := \frac{B_{m,m+1} - 1}{A_{m,m+1} - 1}, \quad s_{m,m+1} := \frac{A_{m,m+1} - B_{m,m+1}}{A_{m,m+1} - 1} \tag{14}$$

і з конгруенції

$$\left\| b_{m1}(x) \ \ \ldots \ \ b_{m,m-1}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m-1} \equiv$$

$$\equiv \left\| s_{mm} \quad s_{m,m+1} \right\| \left\| \begin{matrix} a_{m1}(x) & \ldots & a_{m,m-1}(x) \\ a_{m+1,1}(x) & \ldots & a_{m+1,m-1}(x) \end{matrix} \right\| (\operatorname{mod} \varphi_{m-1}(x)),$$

де $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m-1} = s_{mm} E_{m-1}$, знаходимо $b_{mj}(x)$, а також

$$r_{mj}(x) = \frac{s_{mm} a_{mj}(x) + s_{m,m+1} a_{m+1,j}(x) - s_{mm} b_{mj}(x)}{\varphi_{m-1}(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$j = 1, \ldots, n-1$. Якщо збільшити розмір матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m-1}$, дописавши знизу рядок $\left\| r_{m1}(x) \ \ \ldots \ \ r_{m,m-1}(x) \ \ r_{mm}(x) \right\|$, де $r_{mm}(x) = s_{mm} + s_{m,m+1}\bar{A}_{(m)}^{(m+1)}(x)$, а справа − нульовий стовпець висоти $m-1$, то визначник отриманої матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m}$ буде взаємно простим з $\varphi_m(x)$. Тому з конгруенції

$$\left\| b_{m+1,1}(x) \ \ \ldots \ \ b_{m+1,m}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m} \equiv$$

$$\equiv \left\| a_{m+1,1}(x) \quad \dots \quad a_{m+1,m}(x) \right\| \pmod{\varphi_m(x)} \tag{15}$$

можна знайти невідомі поліноми $b_{m+1,j}(x)$, $j = 1,\dots,m$, а на їхній основі – поліноми

$$r_{m+1,j}(x) = \frac{a_{m+1,j}(x) - b_{m+1,1}(x)r_{1j}(x) - \dots - b_{m+1,m}(x)r_{mj}(x)}{\varphi_m(x)}. \tag{16}$$

Якщо $m < n-1$, то рядком з поліномів $r_{m+1,j}(x)$, $j = 1, \dots, m$, доповнюємо знизу матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^m$, ставимо в кінці рядка $r_{m+1,m+1}(x) = = \frac{\varphi_m(x) - b_{m+1,m}(x)r_{m,m+1}(x)}{\varphi_m(x)} \in \mathbb{C}[x]$, а справа – стовпець висоти m вигляду $\left\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad r_{m,m+1}(x) \right\|^{\top}$, де $r_{m,m+1}(x) = \frac{s_{m,m+1}\varphi_m(x)}{\varphi_{m-1}(x)} \in \mathbb{C}[x]$. Переконуємося, що отримана матриця $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ є оборотною. Це дає підставу розв'язати конгруенцію

$$\left\| b_{m+2,1}(x) \quad \dots \quad b_{m+2,m+1}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1} \equiv$$

$$\equiv \left\| a_{m+2,1}(x) \quad \dots \quad a_{m+2,m+1}(x) \right\| \pmod{\varphi_{m+1}(x)} \tag{17}$$

відносно $b_{m+2,j}(x)$, $j = 1,\dots,m+1$, і на цій основі визначити

$$r_{m+2,j}(x) = \frac{a_{m+2,j}(x) - b_{m+2,1}(x)r_{1j}(x) - \dots - b_{m+2,m+1}(x)r_{m+1,j}(x)}{\varphi_{m+1}(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$j = 1,\dots,m+1. \tag{18}$$

Далі облямовуємо матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ знизу і справа рядком $\left\| r_{m+2,1}(x) \quad \dots \quad r_{m+2,m+1}(x) \quad 1 \right\|$ і нульовим стовпцем висоти $m+1$ відповідно. Отримана матриця $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+2}$ є оборотною. Якщо $m < n-2$, то рекурентно продовжуємо цей процес, поки не дійдемо до матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{n}$ і не знайдемо $b_{pq}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $p = m,\dots,n$, $q = 1,\dots,n-1$, $p > q$, $\deg b_{pq}(x) < \deg \varphi_{p-1}(x)$. Із поліномів $b_{pq}(x)$ в сукупності з $b_{rs}(x) = a_{rs}(x)$, $r = 2,\dots,m-1$, $s = 1,\dots,m-2$, $r > s$, утворюємо матрицю $B(x)$ вигляду (5). Отримана на цьому етапі матриця $B(x)$ разом із матрицями $A(x)$, $R(x) = \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{n}$ та $S = s_{mm}E_{m-1} \oplus \begin{Vmatrix} s_{mm} & s_{m,m+1} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \oplus E_{n-m-1}$ задовольняють рівність (12). Отже, $A(x) \approx B(x)$. Окрім того, $B(x)$ є орієнтованою за тими ж характеристичними коренями $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, що й $A(x)$. Значення

$$b_{21}(\alpha_1), \quad \frac{b_{w_t,1}(\alpha_t)}{b_{t+1,1}(\alpha_t)}, \quad b_{21}(\beta_1), \quad \frac{b_{21}(\alpha_t)}{b_{t+1,1}(\alpha_t)}, \quad \dots,$$

$$\frac{b_{t1}(\alpha_t)}{b_{t+1,1}(\alpha_t)}, \quad \frac{b_{w_t,1}(\beta_t)}{b_{t+1,1}(\beta_t)}, \quad b_{t+1,1}(\alpha_t) \tag{19}$$

для $B(x)$ при всіх $t = 2,\dots,m-1$, $3 \le m \le n-1$, збігаються з відповідними значенням (13) для $A(x)$. Крім того, оскільки для визначених в (14) s_{mm}, $s_{m,m+1}$ маємо

$$s_{mm} + s_{m,m+1} = 1,$$

$$s_{mm}\frac{a_{m1}(\alpha_m)}{a_{m+1,1}(\alpha_m)} + s_{m,m+1} = \frac{b_{m1}(\beta_m)}{b_{m+1,1}(\beta_m)},$$

$$s_{mm}\frac{a_{m1}(\alpha_m)}{a_{m+1,1}(\alpha_m)} + s_{m,m+1} = \frac{b_{m1}(\alpha_m)}{b_{m+1,1}(\alpha_m)},$$

то

$$\frac{b_{m1}(\alpha_m)}{b_{m+1,1}(\alpha_m)} = 1, \quad \frac{b_{m1}(\beta_m)}{b_{m+1,1}(\beta_m)} = B_{m,m+1}, \tag{20}$$

тобто у $B(x)$ значення $B_{m,m+1}$ для $\dfrac{b_{m1}(\beta_m)}{b_{m+1,1}(\beta_m)}$ також є заздалегідь вибраним.

Щоб не вводити нові позначення, вважатимемо, що вже для матриці $A(x)$ (1) відповідні до (19), (20) значення

$$a_{21}(\alpha_1) = \frac{a_{w_t,1}(\alpha_t)}{a_{t+1,1}(\alpha_t)} = 1, \quad a_{21}(\beta_1), \quad \frac{a_{21}(\alpha_t)}{a_{t+1,1}(\alpha_t)}, \quad \dots, \quad \frac{a_{t1}(\alpha_t)}{a_{t+1,1}(\alpha_t)},$$

$$\frac{a_{w_t,1}(\beta_t)}{a_{t+1,1}(\beta_t)}, \quad a_{t+1,1}(\alpha_t), \quad \frac{a_{m1}(\alpha_m)}{a_{m+1,1}(\alpha_m)} = 1, \quad \frac{a_{m1}(\beta_m)}{a_{m+1,1}(\beta_m)},$$

$$t = 2,\dots,m-1, \quad 3 \le m \le n-1, \tag{21}$$

є заздалегідь вибраними. Тут ми припускали без обмеження загальності, що $w_m = m$. Позначимо $A_{m-1,m+1} := \dfrac{a_{m-1,1}(\alpha_m)}{a_{m+1,1}(\alpha_m)}$ і виберемо $B_{m-1,\,m+1}$ так, що

$$B_{m-1,m+1} \ne \begin{cases} A_{m-1,m+1}, \\ A_{m-1,m+1} - \left(\bar{A}^{(m+1)}_{(m-1)}(\gamma)\right)^{-1} & \text{для всіх } \gamma \in M_{\varphi_{m-1}}, \\ A_{m-1,m+1} + \left(\bar{A}^{(m,m+1)}_{(m-1,m)}(\mu)\right)^{-1} & \text{для всіх } \mu \in M_{\varphi_m}. \end{cases}$$

Покладемо $s_{m-1,m+1} = B_{m-1,m+1} - A_{m-1,m+1}$, $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m-2} = E_{m-2}$ і з конгруенції

$$\left\| b_{m-1,1}(x) \ \dots \ b_{m-1,m-2}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m-2} \equiv \left\| 1 \quad s_{m-1,m+1} \right\| \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} a_{m-1,1}(x) & \dots & a_{m-1,m-2}(x) \\ a_{m+1,1}(x) & \dots & a_{m+1,m-2}(x) \end{Vmatrix} (\operatorname{mod} \varphi_{m-2}(x)) \tag{22}$$

знаходимо $b_{m-1,\,j}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg b_{m-1,j}(x) < \deg \varphi_{m-2}(x)$, $j = 1,\dots,m-2$. Також по $b_{m-1,\,j}(x)$ визначаємо поліноми

$$r_{m-1,j}(x) = \frac{a_{m-1,j}(x) + s_{m-1,m+1}a_{m+1,j}(x) - b_{m-1,j}(x)}{\varphi_{m-2}(x)},$$

$j = 1, \dots, m-2$, з яких разом з $r_{m-1,m-1}(x) = 1 + s_{m-1,m+1}\overline{A}^{(m+1)}_{(m-1)}(x)$ утворюємо рядок $\left\| r_{m-1,1}(x) \ \ \dots \ \ r_{m-1,m-2}(x) \ \ r_{m-1,m-1}(x) \right\|$. Цим рядком і нульовим стовпцем висоти $m-2$ облямовуємо відповідно знизу і справа $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m-2}$ і отримуємо матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m-1}$. Оскільки визначник цієї матриці є взаємно простий з $\varphi_{m-1}(x)$, то з конгруенції

$$\left\| b_{m1}(x) \ \ \dots \ \ b_{m,m-1}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m-1} \equiv$$

$$\equiv \left\| a_{m1}(x) \ \ \dots \ \ a_{m,m-1}(x) \right\| \pmod{\varphi_{m-1}(x)}$$

знаходимо $b_{mj}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $j = 1, \dots, m-1$, $\deg b_{mj}(x) < \deg \varphi_{m-1}(x)$. Розв'язність цієї конгруенції гарантована вибором $B_{m-1,m+1}$. На основі знайдених $b_{mj}(x)$ визначаємо

$$r_{mj}(x) = \frac{a_{mj}(x) - b_{m1}(x)r_{1j}(x) - \dots - b_{m,m-1}(x)r_{m-1,j}(x)}{\varphi_{m-1}(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$j = 1, \dots, m-1,$$

$$r_{mm}(x) = \frac{\varphi_{m-1}(x) - b_{m,m-1}(x)r_{m-1,m}(x)}{\varphi_{m-2}(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

де $r_{m-1,m}(x) = \dfrac{s_{m-1,m+1}a_{m+1,m}(x)}{\varphi_{m-2}(x)} \in \mathbb{C}[x]$. Облямовуючи $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m-1}$ знизу і справа рядком $\left\| r_{m1}(x) \ \ \dots \ \ r_{m,m-1}(x) \ \ r_{mm}(x) \right\|$ і стовпцем висоти $m-1$ вигляду $\left\| 0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ r_{m-1,m}(x) \right\|^{\top}$ відповідно, отримаємо матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m}$. Зумовлена вибором $B_{m-1,m+1}$ неособливість цієї матриці при довільному $x = \mu \in M_{\varphi_m}$ дає можливість розв'язати конгруенцію вигляду (15) відносно невідомих $b_{m+1,j}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $j = 1, \dots, m$. Знайшовши усі $b_{m+1,j}(x)$, а за ними – $r_{m+1,j}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $j = 1, \dots, m$, вигляду (16), послідовно визначимо

$$r_{m-1,m+1}(x) = \frac{s_{m-1,m+1}\varphi_m(x)}{\varphi_{m-2}(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$r_{m,m+1}(x) = \frac{b_{m,m-1}(x)r_{m-1,m+1}(x)}{\varphi_{m-1}(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$r_{m+1,m+1}(x) =$$

$$= \frac{\varphi_m(x) - b_{m+1,m-1}(x)r_{m-1,m+1}(x) - b_{m+1,m}(x)r_{m,m+1}(x)}{\varphi_m(x)} \in \mathbb{C}[x].$$

Побудуємо матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ облямуванням $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m}$ знизу і справа рядком $\left\| r_{m+1,1}(x) \ \ \dots \ \ r_{m+1,m}(x) \ \ r_{m+1,m+1}(x) \right\|$ і стовпцем висоти m вигляду $\left\| 0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ r_{m-1,m+1}(x) \ \ r_{m,m+1}(x) \right\|^{\top}$ відповідно. Можна переконатися, що

$\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1} \in GL(m+1, \mathbb{C}[x])$. Якщо $m < n-1$, то з конгруенції вигляду (17) із $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ знаходимо невідомі $b_{m+2,\, j}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg b_{m+2,j}(x) < \deg \varphi_{m+1}(x)$, $j = 1, \dots, m+1$, а на їхній основі − поліноми $r_{m+2,j}(x)$ вигляду (18). Знову облямовуємо $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ справа нульовим стовпцем висоти $m+1$ і знизу рядком $\left\| r_{m+2,1}(x) \quad \dots \quad r_{m+2,m+1}(x) \quad r_{m+2,m+2}(x) \right\|$, де $r_{m+2,m+2}(x) = 1$, щоб отримати матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+2} \in GL(m+2, \mathbb{C}[x])$. Якщо $m < n-2$, то продовжуємо цей процес, поки не прийдемо до матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{n} \in GL(n, \mathbb{C}[x])$. Із сукупності знайдених на кожному кроці поліномів $b_{pq}(x)$, $p = m-1, \dots, n$, $q = 1, \dots, n-1$, $p > q$, $\deg b_{pq}(x) < \deg \varphi_{p-1}(x)$, та поліномів $b_{rs}(x) = a_{rs}(x)$, $r = 2, \dots, m-2$, $s = 1, \dots, m-3$, $r > s$, побудуємо матрицю $B(x)$ вигляду (5). Така матриця $B(x)$ разом з $A(x)$, отриманою на останньому кроці матрицею $R(x) = \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{n}$ та матрицею

$$S = E_{m-2} \oplus \begin{Vmatrix} 1 & 0 & s_{m-1,m+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \oplus E_{n-m-1}$$

задовольняють рівність (12). Це означає, що $A(x) \approx B(x)$. Нескладно перевірити, що в $B(x)$ зберігається орієнтація матриці $A(x)$ та фіксовані значення (19), (20). Крім того, з (22) і (15) маємо відповідно $a_{m-1,1}(\alpha_m) + s_{m-1,m+1} a_{m+1,1}(\alpha_m) = b_{m-1,1}(\alpha_m)$ і $a_{m+1,1}(\alpha_m) = b_{m+1,1}(\alpha_m)$, звідки випливає, що значення $\dfrac{b_{m-1,1}(\alpha_m)}{b_{m+1,1}(\alpha_m)} = B_{m-1,m+1}$ для $B(x)$ є заздалегідь вибраним.

Знову, заради уникнення введення нових позначень, допускаємо, що вже для матриці $A(x)$ (1), разом зі значеннями (21) фіксованим є також значення $\dfrac{a_{m-1,\,1}(\alpha_m)}{a_{m+1,\,1}(\alpha_m)}$. Припускаємо за індукцією, що в $A(x)$ для деякого номера h, $2 < h \le m-1$, фіксованими є також значення

$$\frac{a_{u1}(\alpha_m)}{a_{m+1,1}(\alpha_m)}, \quad u = h, \dots, m-1. \tag{23}$$

Позначимо $A_{h-1,m+1} := \dfrac{a_{h-1,1}(\alpha_m)}{a_{m+1,1}(\alpha_m)}$ і виберемо $B_{h-1,\, m+1}$ так, що

$$B_{h-1,m+1} \ne \begin{cases} A_{h-1,m+1}, \\ A_{h-1,m+1} - \left(\overline{A}_{(h-1)}^{(m+1)}(\gamma)\right)^{-1} \\ \qquad\qquad \text{для всіх } \ \gamma \in M_{\varphi_{h-1}}, \\ A_{h-1,m+1} + (-1)^{j-h} \left(\overline{A}_{(h-1,h,\dots,j)}^{(h,\dots,j,m+1)}(\mu_j)\right)^{-1} \\ \qquad\qquad \text{для всіх } \ \mu_j \in M_{\varphi_j},\ j = h, \dots, m. \end{cases}$$

Покладаємо

$$s_{h-1,\, m+1} := B_{h-1,\, m+1} - A_{h-1,\, m+1}$$

і з конгруенції

$$\left\| b_{h-1,1}(x) \;\; \ldots \;\; b_{h-1,h-2}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h-2} \equiv \left\| 1 \quad s_{h-1,m+1} \right\| \times$$
$$\times \left\| \begin{matrix} a_{h-1,1}(x) & \ldots & a_{h-1,h-2}(x) \\ a_{m+1,1}(x) & \ldots & a_{m+1,h-2}(x) \end{matrix} \right\| (\operatorname{mod} \varphi_{h-2}(x)), \qquad (24)$$

де $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h-2} = E_{h-2}$, знаходимо розв'язок $b_{h-1,j}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg b_{h-1,j}(x) < \deg \varphi_{h-2}(x)$, $j = 1, \ldots, h-2$. На основі цього розв'язку визначаємо $r_{h-1,j}(x) = \dfrac{a_{h-1,j}(x) + s_{h-1,m+1} a_{m+1,j}(x) - b_{h-1,j}(x)}{\varphi_{h-2}(x)} \in \mathbb{C}[x]$, а також $r_{h-1,h-1}(x) = 1 + s_{h-1,m+1} \overline{A}_{(h-1)}^{(m+1)}(x)$. Облямовуємо $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h-1}$ знизу і справа рядком $\left\| r_{h-1,1}(x) \;\; \ldots \;\; r_{h-1,h-2}(x) \;\; r_{h-1,h-1}(x) \right\|$ і нульовим стовпцем висоти $h-2$ відповідно. Оскільки визначник одержаної в результаті матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h-1}$ є взаємно простим з $\varphi_{h-1}(x)$, то з конгруенції

$$\left\| b_{h1}(x) \;\; \ldots \;\; b_{h,h-1}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h-1} \equiv \left\| a_{h1}(x) \;\; \ldots \;\; a_{h,h-1}(x) \right\| (\operatorname{mod} \varphi_{h-1}(x))$$

знайдемо $b_{hj}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $j = 1, \ldots, h-1$, після чого визначимо $r_{hj}(x) = \dfrac{a_{hj}(x) - b_{h1}(x) r_{1j}(x) - \ldots - b_{h,h-1}(x) r_{h-1,j}(x)}{\varphi_{h-1}(x)} \in \mathbb{C}[x]$, а також $r_{hh}(x) = \dfrac{\varphi_{h-1}(x) - b_{h,h-1}(x) r_{h-1,h}(x)}{\varphi_{h-2}(x)} \in \mathbb{C}[x]$, де $r_{h-1,h}(x) = s_{h-1,m+1} \dfrac{a_{m+1,h}(x) r_{h-1,h}(x)}{\varphi_{h-2}(x)} \in \mathbb{C}[x]$. Облямовуємо $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h-1}$ знизу і справа рядком $\left\| r_{h1}(x) \;\; \ldots \;\; r_{h,h-1}(x) \;\; r_{hh}(x) \right\|$ і стовпцем висоти $h-1$ вигляду $\left\| 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; r_{h-1,h}(x) \right\|^{\top}$ відповідно. При цьому отримуємо матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h}$, яка значиться у конгруенції

$$\left\| b_{h+1,1}(x) \;\; \ldots \;\; b_{h+1,h}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h} \equiv \left\| a_{h+1,1}(x) \;\; \ldots \;\; a_{h+1,h}(x) \right\| (\operatorname{mod} \varphi_h(x)).$$

Оскільки $\det \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h} = 1 - s_{h-1,m+1} \overline{A}_{(h-1,h)}^{(h,m+1)}(x)$, то завдяки вибору $B_{h-1,m+1}$ маємо $\left(\det \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h}, \varphi_h(x) \right) = 1$. Тому останню конгруенцію можна розв'язати відносно невідомих $b_{h+1,j}(x)$, $j = 1, \ldots, h$. За цим розв'язком знаходимо поліноми

$$r_{h+1,j}(x) = \frac{a_{h+1,j}(x) - b_{h+1,1}(x) r_{1j}(x) - \ldots - b_{h+1,h}(x) r_{hj}(x)}{\varphi_h(x)}, \qquad j = 1, \ldots, h,$$

до яких долучаємо

$$r_{h+1,h+1}(x) = \frac{\varphi_h(x) - b_{h+1,h-1}(x) r_{h-1,h+1}(x) - b_{h+1,h}(x) r_{h,h+1}(x)}{\varphi_h(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

де $r_{h,h+1}(x) = -\dfrac{b_{h,h-1}(x) r_{h-1,h+1}(x)}{\varphi_{h-1}(x)} \in \mathbb{C}[x]$, $r_{h-1,h+1}(x) = s_{h-1,m+1} \dfrac{a_{m+1,h+1}(x)}{\varphi_{h-2}(x)} \in \mathbb{C}[x]$, і облямовуємо $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^h$ знизу і справа рядком $\left\| r_{h+1,1}(x) \quad \ldots \quad r_{h+1,h}(x) \quad r_{h+1,h+1}(x) \right\|$ і стовпцем висоти h вигляду $\left\| 0 \quad \ldots \quad 0 \quad r_{h-1,h+1}(x) \quad r_{h,h+1}(x) \right\|^{\top}$ відповідно. В результаті отримуємо матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h+1}$. Оскільки $\det \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h+1} = 1 + s_{h-1,m+1} \overline{A}_{(h-1,h,h+1)}^{(h,h+1,m+1)}(x)$, то з урахуванням вибору $B_{h-1,m+1}$ маємо $\left(\det \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h+1}, \varphi_{h+1}(x) \right) = 1$, звідки випливає розв'язність конгруенції

$$\left\| b_{h+2,1}(x) \quad \ldots \quad b_{h+2,h+1}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h+1} \equiv$$

$$\equiv \left\| a_{h+2,1}(x) \quad \ldots \quad a_{h+2,h+1}(x) \right\| \pmod{\varphi_{h+1}(x)}$$

відносно невідомих $b_{h+2,j}(x)$, $j = 1, \ldots, h+1$. За знайденими $b_{h+2,j}(x)$, $\deg b_{h+2,j}(x) < \deg \varphi_{h+1}(x)$, та визначеними за ними поліномами

$$r_{h+2,j}(x) = \frac{a_{h+2,j}(x) - b_{h+2,1}(x) r_{1j}(x) - \ldots - b_{h+2,h+1}(x) r_{h+1,j}(x)}{\varphi_{h+1}(x)},$$

$$j = 1, \ldots, h+1,$$

$$r_{h+2,h+2}(x) = \frac{\varphi_{h+1}(x) - b_{h+2,h-1}(x) r_{h-1,h+2}(x) - b_{h+2,h}(x) r_{h,h+2}(x)}{\varphi_{h+1}(x)} -$$

$$- \frac{b_{h+2,h+1}(x) r_{h+1,h+2}(x)}{\varphi_{h+1}(x)},$$

$$r_{h+1,h+2}(x) = -\frac{b_{h+1,h-1}(x) r_{h-1,h+2}(x) + b_{h+1,h}(x) r_{h,h+2}(x)}{\varphi_h(x)},$$

$$r_{h,h+2}(x) = -\frac{b_{h,h-1}(x) r_{h-1,h+2}(x)}{\varphi_{h-1}(x)},$$

де

$$r_{h-1,h+2}(x) = s_{h-1,m+1} \frac{\varphi_{h+1}(x)}{\varphi_{h-2}(x)},$$

утворюємо рядок

$$\left\| r_{h+2,1}(x) \quad \ldots \quad r_{h+2,h+1}(x) \quad r_{h+2,h+2}(x) \right\|$$

та стовпець висоти $h+1$ вигляду

$$\left\| 0 \quad \ldots \quad 0 \quad r_{h-1,h+2}(x) \quad r_{h,h+2}(x) \quad r_{h+1,h+2}(x) \right\|^{\top}.$$

Облямовуємо $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h+1}$ цими рядком і стовпцем знизу і справа відповідно, щоб одержати матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h+2}$. Ця матриця є або оборотною, якщо $h = m-2$, або її визначник дорівнює $1 - s_{h-1,m+1} \overline{A}_{(h-1,h,h+1,h+2)}^{(h,h+1,h+2,m+1)}(x)$, якщо $h < m-2$. У другому випадку $\left(\det \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h+2}, \varphi_{h+2}(x) \right) = 1$. Тому конгруенцію

$$\left\| b_{h+3,1}(x) \quad \ldots \quad b_{h+3,h+2}(x) \right\| \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{h+2} \equiv$$

$$\equiv \left\| a_{h+3,1}(x) \;\; \ldots \;\; a_{h+3,h+2}(x) \right\| \pmod{\varphi_{h+2}(x)}$$

можна розв'язати відносно невідомих $b_{h+3,j}(x)$, $j = 1,\ldots,h+2$, а відтак знайти поліноми $r_{h+3,j}(x)$. Продовжуємо цей процес. Через $m-h+2$ кроки прийдемо до конгруенції вигляду (15). Визначник матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^m$, що буде фігурувати у цій конгруенції, дорівнює

$$1 + (-1)^{m-h+1} s_{h-1,m+1} \overline{A}_{(h-1,h,\ldots,m)}^{(h,\ldots,m,m+1)}(x).$$

Якщо врахувати, що $s_{h-1,m+1} := B_{h-1,m+1} - A_{h-1,m+1}$ з обмеженням

$$B_{h-1,m+1} \neq A_{h-1,m+1} + (-1)^{m-h} \left(\overline{A}_{(h-1,h,\ldots,m)}^{(h,\ldots,m,m+1)}(\mu_j) \right)^{-1}$$

для кожного $\mu_j \in M_{\varphi_j}$, то отримаємо $\left(\det \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^m, \varphi_m(x) \right) = 1$. Тому таку конгруенцію вигляду (15) із вказаною тут матрицею-коефіцієнтом $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^m$ можемо розв'язати відносно $b_{m+1,j}(x)$, $j = 1,\ldots,m$, за якими знайдемо поліноми $r_{m+1,j}(x)$ вигляду (16), а також

$$r_{m+1,m+1}(x) = \frac{\varphi_m(x) - b_{m+1,h-1}(x) r_{h-1,m+1}(x) - \ldots - b_{m+1,m}(x) r_{m,m+1}(x)}{\varphi_m(x)} \in$$

$$\in \mathbb{C}[x],$$

де

$$r_{h-1,m+1}(x) = s_{h-1,m+1} \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{h-2}(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$r_{u,m+1}(x) = -\frac{b_{u,h-1}(x) r_{h-1,m+1}(x) + \ldots + b_{u,u-1}(x) r_{u-1,m+1}(x)}{\varphi_{u-1}(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$u = h, \ldots, m.$$

Якщо облямувати $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^m$ знизу і справа рядком

$$\left\| r_{m+1,1}(x) \;\; \ldots \;\; r_{m+1,m}(x) \;\; r_{m+1,m+1}(x) \right\|$$

і стовпцем висоти m вигляду

$$\left\| 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; r_{h-1,m+1}(x) \;\; \ldots \;\; r_{m,m+1}(x) \right\|^{\top}$$

відповідно, то отримана матриця $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ буде оборотною. Якщо $m = n-1$, то процес завершено. Якщо $m < n-1$, то з конгруенції вигляду (17) з отриманою тут матрицею $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ знаходимо поліноми $b_{m+2,j}(x)$, $j = 1,\ldots,m+1$, а за ними $r_{m+2,j}(x) \in \mathbb{C}[x]$ вигляду (18). Поклавши $r_{m+2,m+2}(x) = 1$, облямуванням $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ знизу і справа рядком $\left\| r_{m+2,1}(x) \;\; \ldots \;\; r_{m+2,m+1}(x) \;\; r_{m+2,m+2}(x) \right\|$ і нульовим стовпцем висоти $m+1$ приходимо до оборотної матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+2}$. Продовжуємо далі, поки не отримаємо матрицю $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^n \in GL(n, \mathbb{C}[x])$. Упродовж цього процесу будуть знайдені елементи $b_{pq}(x)$, $p = h-1,\dots,n$, $q = 1,\dots,n-1$, $p > q$, з яких сукупно з $b_{rs}(x) = a_{rs}(x)$, $r = 2,\dots,h-2$, $s = 1,\dots,h-3$, $r > s$, побудуємо матрицю $B(x)$ вигляду (5). Легко переконатися, що ця матриця разом з $A(x)$, отриманою тут $R(x) = \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^n$ та матрицею

$$S = E_{h-2} \oplus \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & s_{h-1,m+1} \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{Vmatrix} \oplus E_{n-m-2}$$

задовольняють рівність (12). Значить, $A(x) \approx B(x)$. Побудована матриця $B(x)$ орієнтована так само, як і $A(x)$. Вона успадкувала від $A(x)$ усі відповідні до (21) і (23) фіксовані значення. Крім того, як видно з (24) і (15), значення $\dfrac{b_{h-1,1}(\alpha_m)}{b_{m+1,1}(\alpha_m)} = B_{h-1,m+1}$ також є заздалегідь вибраним.

Цим індуктивно доведено, що для $B(x)$ усі значення $\dfrac{b_{i1}(\alpha_m)}{b_{m+1,1}(\alpha_m)}$, $i = 2,\dots,m-1$ (як і $\dfrac{b_{m1}(\alpha_m)}{b_{m+1,1}(\alpha_m)} = 1$ при $m = w_m$) є заздалегідь вибраними.

Знову, щоб не вводити нові позначення для отриманих щораз нових матриць, будемо вважати, що вже для матриці $A(x)$ (1) значення (21), (23), а також

$$\frac{a_{i1}(\alpha_m)}{a_{m+1,1}(\alpha_m)}, \quad i = 2,\dots,m-1, \quad \frac{a_{m1}(\alpha_m)}{a_{m+1,1}(\alpha_m)} = 1 \tag{25}$$

є заздалегідь вибраними. Позначимо $A_{1,m+1} := a_{m+1,1}(\alpha_m) \neq 0$ і виберемо $B_{1,\, m+1}$ так, що

$$B_{1,m+1} \neq \begin{cases} 0, \\ A_{1,m+1}, \\ \dfrac{\bar{A}_{(1)}^{(m+1)}(\gamma_1) A_{1,m+1}}{\bar{A}_{(1)}^{(m+1)}(\gamma_1) - A_{1,m+1}} \text{ для кожного } \gamma_1 \in M_{\varphi_1}, \\ \dfrac{\bar{A}_{(1,2,\dots,i)}^{(2,\dots,i,m+1)}(\gamma_i) A_{1,m+1}}{\bar{A}_{(1,2,\dots,i)}^{(2,\dots,i,m+1)}(\gamma_i) + (-1)^i A_{1,m+1}} \\ \qquad \text{для кожного } \gamma_i \in M_{\varphi_i},\ i = 2,\dots,m. \end{cases}$$

Позначимо також $s_{1,m+1} := (B_{m+1,1})^{-1} - (A_{m+1,1})^{-1}$ і визначимо $r_{11}(x) = 1 + s_{1,m+1} a_{m+1,1}(x)$. За вказаних вище обмежень при виборі $B_{1,m+1}$ поліном $r_{11}(x)$ є взаємно простим з $\varphi_1(x)$. Тому конгруенцію (7) при такому $r_{11}(x)$ можна розв'язати відносно $b_{21}(x)$ та знайти $r_{21}(x) = \dfrac{a_{21}(x) - b_{21}(x) r_{11}(x)}{\varphi_1(x)} \in \mathbb{C}[x]$. Якщо позначити $r_{12}(x) = s_{1,m+1} a_{m+1,2}(x)$ і обчислити $r_{22}(x) = \dfrac{\varphi_1(x) - b_{21}(x) r_{12}(x)}{\varphi_1(x)} \in \mathbb{C}[x]$, то визначник побудованої з таких $r_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2$, матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^2$ буде взаємно простим з $\varphi_2(x)$, оскільки $\det\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2 = 1 - s_{1,m+1}\bar{A}_{(1,2)}^{(2,m+1)}(x)$. Конгруенція вигляду (8) із вказаною тут матрицею $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$ може бути розв'язана відносно невідомих $b_{31}(x)$, $b_{32}(x)$. Після знаходження цих невідомих поліномів степенів менших ніж $\deg\varphi_2(x)$, а за ними – поліномів $r_{31}(x)$, $r_{32}(x)$ вигляду (9) облямовуємо матрицю $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$ знизу рядком $\left\|r_{31}(x) \quad r_{32}(x) \quad r_{33}(x)\right\|$ і справа стовпцем $\left\|r_{13} \quad r_{23}\right\|^{\top}$, де $r_{13}(x) = s_{1,m+1}a_{m+1,3}$, $r_{23}(x) = -\dfrac{b_{21}r_{13}(x)}{\varphi_1(x)} \in \mathbb{C}[x]$, $r_{33}(x) = \dfrac{\varphi_2(x) - b_{31}r_{13}(x) - b_{32}r_{23}(x)}{\varphi_2(x)} \in \mathbb{C}[x]$. В результаті приходимо до $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3$. Оскільки $\det\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3 = 1 + s_{1,m+1}\bar{A}_{(1,2,3)}^{(2,3,m+1)}(x)$, то враховуючи вибір $B_{1,m+1}$, а відтак і $s_{1,m+1}$, маємо, що $(\det\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3, \varphi_3(x)) = 1$. Це дає підставу стверджувати, що конгруенція вигляду (10) із вказаною тут матрицею $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3$ має розв'язок. За розв'язком $b_{4j}(x)$, $j = 1, 2, 3$, цієї конгруенції знаходимо поліноми $r_{4j}(x)$ вигляду (11), а також рекурентно визначаємо

$$r_{14}(x) = s_{1,m+1}a_{m+1,4}(x), \qquad r_{24}(x) = -\frac{b_{21}(x)r_{14}(x)}{\varphi_1(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$r_{34}(x) = -\frac{b_{31}(x)r_{14}(x) + b_{32}(x)r_{24}(x)}{\varphi_2(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$r_{44}(x) = \frac{\varphi_3(x) - b_{41}(x)r_{14}(x) - b_{42}(x)r_{24}(x) - b_{43}(x)r_{34}(x)}{\varphi_3(x)} \in \mathbb{C}[x].$$

Поліномами $r_{4j}(x)$, $r_{j4}(x)$, $j = 1, 2, 3$, і $r_{44}(x)$ облямовуємо $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^3$ і приходимо до матриці $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^4$, визначник якої $\det\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^4 = 1 - s_{1,m+1}\bar{A}_{(1,2,3,4)}^{(2,3,4,m+1)}(x)$ є взаємно простим з $\varphi_4(x)$, якщо $m > 3$. Тому конгруенція

$$\left\|b_{51}(x) \quad \ldots \quad b_{54}(x)\right\| \left\|r_{ij}(x)\right\|_1^4 \equiv \left\|a_{51}(x) \quad \ldots \quad a_{54}(x)\right\| \pmod{\varphi_4(x)}$$

є розв'язною відносно $b_{5j}(x)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Цей процес можна продовжити. Через m кроків прийдемо до конгруенції вигляду (15) з матрицею-коефіцієнтом $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^n$ при невідомому $\left\|b_{m+1,1}(x) \quad \ldots \quad b_{m+1,m}(x)\right\|$. Розв'язність цієї конгруенції, як і на попередніх кроках, обґрунтовується взаємною простотою визначника $\det\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^m = 1 + (-1)^{m-1}s_{1,m+1}\bar{A}_{(1,2,\ldots,m)}^{(2,\ldots,m,m+1)}(x)$ і $\varphi_m(x)$. Після її розв'язання визначаємо поліноми $r_{m+1,j}(x)$, $j = 1, \ldots, m$, вигляду (16).

Якщо позначити $r_{1,m+1}(x) := s_{1,m+1}\varphi_m(x)$ і рекурентно визначити

$$r_{k,m+1}(x) = -\frac{b_{k1}(x)r_{1,m+1}(x) + \ldots + b_{k,k-1}(x)r_{k-1,m+1}(x)}{\varphi_{k-1}(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

$$k = 2, \ldots, m,$$

$$r_{m+1,m+1}(x) = \frac{\varphi_m(x) - b_{m+1,1}(x) r_{1,m+1}(x) - \ldots - b_{m+1,m}(x) r_{m,m+1}(x)}{\varphi_m(x)} \in \mathbb{C}[x],$$

то облямуванням матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^m$ знизу і справа рядком

$$\left\| r_{m+1,1}(x) \quad \ldots \quad r_{m+1,m}(x) \quad r_{m+1,m+1}(x) \right\|$$

і стовпцем

$$\left\| r_{1,m+1}(x) \quad r_{2,m+1}(x) \quad \ldots \quad r_{m,m+1}(x) \right\|^{\top}$$

відповідно приходимо до матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1} \in GL(m+1, \mathbb{C}[x])$. Якщо $m < n-1$, то з конгруенції вигляду (17) із вказаною тут матрицею $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ знаходимо поліноми $b_{m+2,j}(x)$, $j = 1, \ldots, m+1$, а за ними і $r_{m+2,j}(x)$ вигляду (18). Облямуванням $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+1}$ знизу і справа рядком $\left\| r_{m+2,1}(x) \quad \ldots \quad r_{m+2,m+1}(x) \quad 1 \right\|$ і нульовим стовпцем висоти $m+1$ відповідно прийдемо до матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+2} \in GL(m+2, \mathbb{C}[x])$. Якщо $m < n-2$, то знову розв'язуємо відповідну конгруенцію з матрицею-коефіцієнтом $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{m+2}$. Продовжуємо цей процес, поки не прийдемо до матриці $\left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{n} \in GL(n, \mathbb{C}[x])$. В результаті будуть знайдені також поліноми $b_{pq}(x)$, $p = 2, \ldots, n$, $q = 1, \ldots, n-1$, $p > q$, з яких утворимо матрицю $B(x)$ вигляду (5). Отримані тут $B(x)$, $R(x) = \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^{n}$ разом з вихідною матрицею $A(x)$ та матрицею

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & s_{1,m+1} \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{Vmatrix} \oplus E_{n-m-1}$$

задовольняють співвідношення (12). Це означає, що $A(x) \approx B(x)$. При цьому $B(x)$ зберігає орієнтацію матриці $A(x)$ (за тими самими характеристичними коренями). Також заздалегідь вибрані значення (21), (25) для $A(x)$ збігаються з відповідними значеннями для $B(x)$. Крім того, як видно з конгруенції (15), при $x = \alpha_m$ маємо $b_{m+1,1}(\alpha_m) = B_{1,m+1}$, тобто значення $b_{m+1,1}(\alpha_m)$ є заздалегідь вибраним. Таким чином, у матриці $B(x)$ фіксованими є відповідні до (21) значення для $t = 2, \ldots, m-1, m$. Цим індуктивно доведено існування для $A(x)$ напівскалярно еквівалентної матриці $B(x)$ вигляду (5) із заздалегідь вибраними зазначеними в умові теореми значеннями (6). ♦

3. Доведення єдиності матриці з фіксованими значеннями окремих її елементів. Доведена в п. 2 теорема 1 є теоремою існування матриці із заздалегідь вибраними властивостями напівскалярно еквівалентної до заданої. Сформульована далі теорема є теоремою єдиності такої матриці.

Теорема 2. *Вказана в умові теореми* 1 *матриця* $B(x)$ *з фіксованими значеннями* (6) *у класі напівскалярно еквівалентних до неї матриць визначаєтьcя однозначно.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що для орієнтованих за характеристичними коренями $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ напівскалярно еквівалентних матриць $A(x)$ (1) і $B(x)$ (5) відповідні фіксовані значення типу (6) збігаються. Піддамо кожну з цих матиць перетворенню подібності з матрицею перетворення $P = \operatorname{diag}(1, 1, a_{31}(\alpha_2), \ldots, a_{n1}(\alpha_{n-1}))$. Тоді в отриманих матрицях

$$P^{-1}A(x)P = A'(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a'_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & \varphi_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & a'_{n3}(x) & \ldots & \varphi_{n-1}(x) \end{Vmatrix},$$

$$P^{-1}B(x)P = B'(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b'_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ b'_{31}(x) & b'_{32}(x) & \varphi_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b'_{n1}(x) & b'_{n2}(x) & b'_{n3}(x) & \ldots & \varphi_{n-1}(x) \end{Vmatrix}.$$

маємо $a'_{21}(\beta_1) \ne a'_{21}(\alpha_1) = 1$, $b'_{21}(\beta_1) \ne b'_{21}(\alpha_1) = 1$, $a'_{21}(\beta_1) = b'_{21}(\beta_1)$, $a'_{i+1,1}(\alpha_i) = b'_{i+1,1}(\alpha_i) = 1$, $a'_{i1}(\alpha_j) = b'_{i1}(\alpha_j)$, $\dfrac{a'_{t_i 1}(\beta_i)}{a'_{i+1,1}(\beta_i)} = \dfrac{b'_{t_i 1}(\beta_i)}{b'_{i+1,1}(\beta_i)}$, $i, j = 2, \ldots, n-1$, $i \le j$.

Це означає, що матриці $A'(x)$, $B'(x)$ задовольняють умови теореми 1 [5], згідно з якою $A'(x) = B'(x)$. Звідси $A(x) = B(x)$. ♦

Висновки. Доведено звідність напівскалярно еквівалентними перетвореннями одного типу орієнтованих за характеристичними коренями матриць простої структури до вигляду із заздалегідь фіксованими характеристиками. У доведенні цього факту вказується конкретна послідовність окремих напівскалярно еквівалентних перетворень, які слід виконати з вихідною матрицею для отримання у підсумку потрібної матриці. На кожному кроці визначаються ліва і права перетворювальні матриці, з яких після завершення процесу можна побудувати ліву і праву матриці результуючого перетворення. Отримана у результаті матриця з фіксованими значеннями окремих її елементів у класі напівскалярно еквівалентних до неї матриць визначається однозначно. Це дає можливість застосування такої матриці до задачі класифікації виділеного типу поліноміальних матриць відносно напівскалярної еквівалентності та до розв'язування окремих типів матричних рівнянь.

1. *Джалюк Н. С.* Розв'язки матричного рівняння $AX + YB = C$ з трикутними коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 2. – С. 26–31.
   Те саме: *Dzhaliuk N. S.* Solutions of the matrix equation $AX + YB = C$ with triangular coefficients // J. Math. Sci. – 2022. – **261**, No. 1. – P. 25–32.
   – https://doi.org/10.1007/s10958–022–05734–x.
2. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Матричні лінійні різносторонні рівняння над різними областями, методи побудови розв'язків та опис їхньої структури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 1-2. – С. 18–41 (2022)
   – https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.1-2.18-41.
   Те саме: *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Matrix linear bilateral equations over different domains, methods for the construction of solutions, and description of their structure // J. Math. Sci. – 2024. – **282**, No. 5. – P. 616–645.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-024-07206-w.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.

4. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
5. *Шаваровський Б. З.* Про класифікацію одного типу поліноміальних матриць простої структури відносно напівскалярної еквівалентності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2024. – **67**, № 1-2. – С. 5–14.
   – https://doi.org/10.15407/mmpmf2024.67.1-2.5-14.
6. *Шаваровський Б. З.* Про трикутну форму поліноміальної матриці простої структури та її інваріанти відносно напівскалярної еквівалентності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 1-2. – С. 16–22.
   – https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.1-2.16-22.
7. *Bondarenko V. M., Futorny V., Petravchuk A. P., Sergeichuk V. V.* Pairs of commuting nilpotent operators with one-dimensional intersection of kernels and matrices commuting with a Weyr matrix // Linear Algebra Appl. – 2021. – **612**. – P. 188–205. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.10.040
8. *Bondarenko V. M., Petravchuk A. P., Styopochkina M. V.* Polynomial similarity of pairs of matrices // Linear Algebra Appl. – 2025. – **708**. – P. 150–158. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.11.029.
9. *Borges V. S., Kashuba I., Sergeichuk V. V., Sodré E. V., Zaidan A.* Classification of linear operators satisfying $(Au, v) = (u, A^r v)$ or $(Au, A^r v) = (u, v)$ on a vector space with indefinite scalar product // Linear Algebra Appl. – 2021. – **611**. – P. 118–134. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.12.005.
10. *Kouchekian S., Shekhtman B.* On simultaneous similarity of families of commuting operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 2024. – **152**, No. 1. – P. 129–136. – https://doi.org/10.1090/proc/16594.
11. *Shavarovskii B. Z.* Conditions of semiscalar equivalence of one class 3×3 matrices of simple structure // Hindawi J. Math. – 2022. – **2022**, No. 1. – Article ID 8395922. – 13 p. – https://doi.org/10.1155/2022/8395922.
12. *Shavarovskii B. Z.* On the triangular form of 3×3 matrix of simple structure relative to semiscalar equivalence // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 3-4. – С. 5–28. – https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.5-28.
    Те саме: *Shavarovskii B. Z.* On the triangular form of 3×3-matrices of simple structure relative to semiscalar equivalence // J. Math. Sci. – 2025. – **287**, No. 2. – P. 105–133. – https://doi.org/10.1007/s10958-025-07579-6.

A POLYNOMIAL MATRIX ORIENTED BY CHARACTERISTIC ROOTS WITH FIXED VALUES OF SOME ELEMENTS

The existence and uniqueness in the class of semiscalar equivalent matrices of a matrix oriented by characteristic roots with fixed values of some elements are proved. A method for constructing such a matrix and a method for constructing transformation matrices are developed. The established form of the matrix, in addition to the problem of classification with respect to semiscalar equivalence, can also be used in solving certain types of matrix bilateral equations.

Key words: *matrix of simple structure, semiscalar equivalence of matrices, special triangular form of matrices, matrix oriented by characteristic roots.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.07.24